به نام خدای مهربان

مجموعه کتاب‌های بیست‌پک

پرسؤال

آمار و احتمال

یازدهم

دکتر محمودرضا داورزنی

مطابق با جدیدترین رویکرد امتحانات نهایی

مهروماه

مقدمه

سلام به همهٔ دانش‌آموزای عزیز، معلمای زحمت‌کش و اولیای دلسوز

به لطف خداوند، مجموعهٔ بیســت‌پک آمار و احتمال آماده شد. لازمه که چگونگی استفاده از این پک و چند نکته خدمت شما ارائه بشه. برگزاری امتحان‌های هماهنگ کشوری و اهمیت کسب یه نمرهٔ عالی تو هر درس، دیگه برای همه واضحه! به همین دلیل ما یه مجموعهٔ خیلی خفن براتون آماده کردیم.

ساختار بیست‌پک

این مجموعه شامل ۱ کتاب پرسؤال، ۲ کاربرگ امتحانی و ۳ خلاصه‌کپسولی هست که ویژگی‌های هر کدوم رو به‌صورت مختصر در زیر می‌تونین ببینین.

۱ کتاب پرسؤال: که درسنامه، سؤال و پاسخ داره!

درسنامه

- کامل و در عین حال مختصر
- بیان مثال‌هایی از سؤالات کتاب درسی در لابه‌لای درسنامه
- ذکر مطالب تکمیلی برای درک عمیق‌تر مطالب

سؤالات امتحانی

- پوشش تمرین‌های مهم کتاب درسی و سؤالات برگرفته از مثال‌ها، کار در کلاس‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی
- سؤالات تکمیلی برای فهم بسیار عمیق با نشانگر +۲۰ و ویژهٔ دانش‌آموزان سخت‌کوش
- پوشش تمام سؤالات امتحان نهایی داخل و خارج برگزارشده

۲ کاربرگ امتحانی:

شامل امتحان‌های فصل‌به‌فصل، دو امتحان نوبت اول، امتحان‌های شبیه‌ساز نهایی و امتحان نهایی برگزارشدهٔ اخیر!

امتحان‌های پایان هر فصل

- جمع‌بندی مسائل مهم هر فصل در یک امتحان
- مشاهدهٔ سؤالات شبیه‌سازی‌شده و قابل طرح در امتحان نهایی
- پاسخ‌نامهٔ تفصیلی با ریزبارم دقیق برای تکمیل فرآیند یادگیری

امتحان‌های نوبت اول

- آشنایی با دو نمونه امتحان استاندارد نوبت اول
- خودآزمایی با حل سؤالات این امتحان‌ها
- پاسخ‌نامهٔ تفصیلی با ریزبارم دقیق برای اطلاع از نقاط ضعف خود

امتحان‌های پایان سال

- آشنایی با سؤالات شبیه‌سازی‌شده و احتمالی امتحان نهایی امسال
- شبیه‌سازی امتحان نهایی با رویکرد سطح دشواری کمی بالاتر
- پاسخ‌نامهٔ تفصیلی با ریزبارم دقیق برای خودآزمایی در شب امتحان

۳ خلاصه‌کپسولی:

- مشاهدهٔ تیپ‌های مختلف مسائل در هر درس
- قابلیت مرور چند بارهٔ مطالب خیلی مهم در شب امتحان

آرزوی ما کسب بهترین نمره در این درس برای شماست که مطمئناً با «مطالعهٔ تدریجی» در طول سال محقق می‌شود.

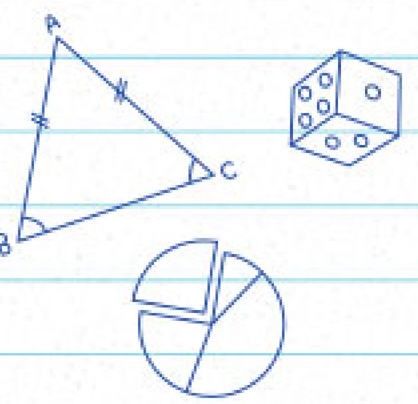
از معلمان عزیز و اولیای محترم خواهشمندم که با ارسال پیشنهادهای خود در بهترشدن کتاب، ما را یاری کنند.

دوستدار همهٔ دانش‌آموزان عزیز
محمود داورزنی
Mahmood.davarzani@gmail.com

فهرست

فصل دوم

احتمال



فصل دوم
احتمال

مشاوره: رسیدیم به خفن‌ترین فصل این کتاب! یعنی احتمال. چهارتا درس و تا دلتون بخواد نکات فنی و تکنیکی داره. قراره ۷ نمره از ۲۰ نمرهٔ نهایی هم از این فصل باشه. تفاوت سطح نمرهٔ بچه‌ها تو امتحان نهایی هم بیشتر به‌خاطر همین فصله. درس‌های اول و دوم، نسبتاً از درس‌های سوم و چهارم ساده‌ترن. خوب یاد گرفتن این درس‌ها، نه‌تنها نمرهٔ نهایی شما رو بالا می‌بره، بلکه با سنگ‌تمومی که تو درسنامه و به‌خصوص مسائل این فصل گذاشتیم، سطح شما از کتاب خیلی بالاتر میره. حالا بپردازیم به درس‌ها و عناوین مهم این فصل.

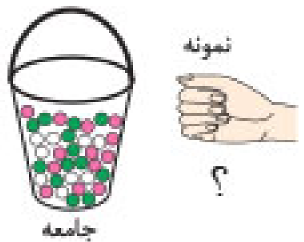
مباحثی که می‌خوانید		تعداد سؤالات نهایی تیر ۱۴۰۳
درس اول: مبانی احتمال	فضای نمونه‌ای / علم آمار و علم احتمال / زبان گزاره به زبان مجموعه‌ها	-
	تشخیص فضای نمونه‌ای / پیشامدهای مستقل و وابسته	-
	اصول احتمال / قضیه‌ها و مسائل	۱
درس دوم: احتمال غیرهم‌شانس	اصول احتمال در فضای نمونه‌ای غیر هم‌شانس	-
	مسائل جبری در فضای غیر هم‌شانس	-
	مسائل کاربردی در فضای غیر هم شانس	۱
درس سوم: احتمال شرطی	احتمال شرطی و کاهش فضای نمونه‌ای	۱
	قانون ضرب احتمال	۱
	قانون احتمال کل	-
	قانون بیز	۱
درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته	تعریف پیشامدهای مستقل و اثبات مستقل‌بودن	۲
	کاربرد مستقل‌بودن پیشامدها در حل مسائل کاربردی	-

درس ۱ مبانی احتمال

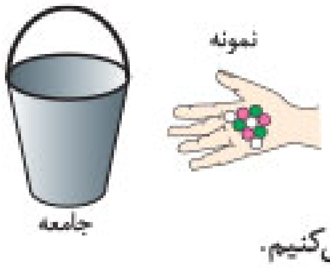
علم آمار و علم احتمال

دو علم «آمار» و «احتمال» به‌رغم شباهت‌هایی که با یکدیگر دارند، تفاوت‌های اساسی نیز با یکدیگر دارند. به عبارت دقیق‌تر:

- **علم آمار:** شناختن «جامعهٔ نامعلوم» با استفاده از «نمونه‌های جمع‌آوری‌شدهٔ معلوم»، مربوط به علم آمار است.



- **علم احتمال:** بررسی یک «نمونهٔ نامعلوم» از یک «جامعهٔ معلوم»، مربوط به علم احتمال است.



بنابراین برای تشخیص این‌که مسئلهٔ مطرح‌شده در کدام حوزه قرار می‌گیرد، به معلوم‌بودن یا نبودن «نمونه» و «جامعه» دقت می‌کنیم.

سؤال کدام‌یک از سؤال‌های زیر، مربوط به علم آمار و کدام‌یک مربوط به علم احتمال است؟ چرا؟

الف) اگر ۲۰ سیب از ۱۰۰ سیب یک جعبه ناسالم باشد، چند سیب از این جعبه برداریم تا تقریباً مطمئن باشیم که دست‌کم یک سیب خراب برداشته‌ایم؟

ب) در یک کلاس ۲۰ نفری که ۱۰ نفر به والیبال علاقه دارند، ۱۰ نفر را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. چه‌قدر امکان دارد که کمتر از ۷ نفر به والیبال علاقه داشته باشند؟

پ) چه تعداد از دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم شهر شما، معدل بالای ۱۵ دارند؟

ت) در انتخابات، ۹۰ درصد از واجدین شرایط شرکت کرده‌اند. اگر از ۵۰ نفر واجدین شرایط بپرسیم که آیا در انتخابات شرکت کرده‌اند یا خیر، چه‌قدر ممکن است که پاسخ بیش از یک نفر، منفی باشد؟

ث) از ۳۰ نفر دانش‌آموز یک کلاس، چند نفر به شنا علاقه دارند؟

ج) درآمد کارمندان شهرداری چه‌قدر است؟

جواب الف) علم احتمال؛ زیرا جامعه معلوم است (۱۰۰ سیب که ۲۰ تای آن‌ها ناسالم است.)؛ ولی کیفیت نمونهٔ انتخاب‌شده، نامعلوم است.

ب) علم احتمال؛ زیرا جامعه معلوم است (۲۰ نفر که ۱۰ نفر به والیبال علاقه دارند.) و کیفیت نمونهٔ انتخاب‌شده، نامعلوم است.

پ) علم آمار؛ زیرا جامعه نامعلوم است.

ت) علم احتمال؛ زیرا جامعه معلوم است (نسبت افراد واجد شرایط)؛ ولی کیفیت نمونهٔ انتخاب‌شده نامعلوم است.

ث) علم آمار؛ زیرا جامعه نامعلوم است. (از ۳۰ نفر، تعداد علاقه‌مندان به شنا مشخص نیست.)

ج) علم آمار؛ زیرا جامعه نامعلوم است.

تشخیص فضای نمونه‌ای و پیشامد

در یک مسئلهٔ احتمال، باید مجموعهٔ تمام حالت‌های ممکن که امکان وقوع دارند را به شکل «عدد» یا «حرف» در مجموعه‌ای به نام S که همان «فضای نمونه‌ای» است، نشان دهیم.

هر عضو فضای نمونه‌ای، یک «برآمد» نامیده می‌شود.

به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای نیز یک «پیشامد» گفته می‌شود.

تذکر: اگر دو آزمایش با فضای نمونه‌ای S_1 و S_2 هم‌زمان انجام شوند، فضای نمونه‌ای این آزمایش، یعنی S، از حاصل‌ضرب دکارتی این دو مجموعه، یعنی $S_1 \times S_2$ ایجاد می‌شود در حالتی‌که تعداد آزمایش‌های هم‌زمان بیش از دو تا باشد، فضای نمونهٔ ترکیب آن‌ها از حاصل‌ضرب فضاهای نمونهٔ S_1، S_2، ... و S_n تشکیل می‌شود؛ یعنی: $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$

سؤال در پرتاب دو تاس به‌طور هم‌زمان، مطلوب است:

الف) تعیین فضای نمونه‌ای و تعداد اعضای آن

ب) تعیین پیشامد این‌که مجموع اعداد روشده ۷ باشد.

پ) تعیین پیشامد این‌که اعداد روشده در تاس اول از اعداد روشده در تاس دوم بزرگ‌تر باشند.

جواب الف) اگر $S_1 = \{1,2,\ldots,6\}$ و $S_2 = \{1,2,\ldots,6\}$ به‌ترتیب فضای نمونهٔ تاس اول و دوم باشند، فضای نمونهٔ پرتاب این دو تاس عبارت است از:

$S = S_1 \times S_2$؛ پس تعداد اعضای آن طبق اصل ضرب، برابر است با: $n(S) = n(S_1) \times n(S_2) = 6 \times 6 = 36$

ب) اگر A پیشامد این باشد که مجموع اعداد روشده ۷ است، آن‌گاه: $A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

پ) اگر B پیشامد خواسته‌شده باشد، داریم: $B = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),\ldots,(5,4),(6,1),\ldots,(6,5)\}$

سؤال یک تاس را به هوا پرتاب می‌کنیم. اگر عدد روشده زوج باشد، یک سکه و اگر عدد روشده فرد باشد، یک تاس دیگر را پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را نوشته و تعداد اعضای آن را مشخص کنید.

ب) منظور از برآمد $(2, 3)$ در فضای نمونه‌ای چیست؟

پ) پیشامدی را بنویسید که مجموع اعداد روشده ۵ باشد.

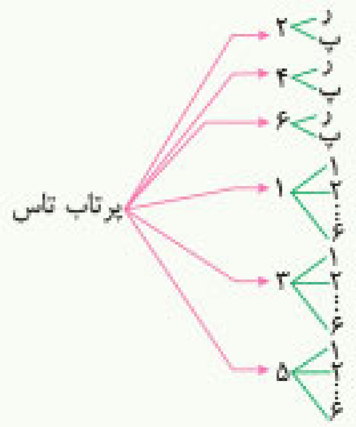
جواب الف) اگر در تاس پرتاب‌شده، عدد زوج، یعنی $\{2,4,6\}$ دیده شود، یک سکه با فضای $\{\text{ر}, \text{پ}\}$ پرتاب می‌شود و اگر عدد تاس، فرد، یعنی $\{1,3,5\}$ باشد، یک تاس با فضای $\{1,2,\ldots,6\}$ پرتاب می‌شود؛ بنابراین فضای نمونهٔ این آزمایش عبارت است از:

$$S = (\{2,4,6\} \times \{\text{ر}, \text{پ}\}) \cup (\{1,3,5\} \times \{1,2,\ldots,6\})$$

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای S برابر است با:

$$n(S) = (3 \times 2) + (3 \times 6) = 6 + 18 = 24$$

از نمودار درختی نیز می‌توانیم برای نمایش فضای نمونه‌ای این آزمایش استفاده کنیم:



تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در نمودار درختی، برابر با تعداد میوه‌های درخت (در سمت راست) است.

ب) برآمد $(۳,۲)$ در فضای نمونه‌ای S، به معنای آن است که تاس اول ۳ آمده است و در پرتاب تاس دوم، ۲ دیده شده است.

پ) اگر A پیشامد مجموع ۵ باشد، پس لزوماً تاس اول، فرد آمده است و تاس دوم پرتاب شده است؛ بنابراین زوج‌هایی را با مؤلفهٔ اول فرد می‌نویسیم که مجموع آن‌ها ۵ می‌شود.

$A = \{(۱,۴), (۳,۲)\}$

سؤال ظرفیت مسافر یک تاکسی، ۴ نفر است. اگر راننده در مسیر رفت، مجبور باشد حداقل یک مسافر سوار کند:

الف) فضای نمونهٔ تعداد مسافران در مسیر رفت‌وبرگشت را بنویسید و تعداد اعضای آن را مشخص کنید.

ب) منظور از برآمد $(۲,۱)$ در فضای نمونه‌ای چیست؟

پ) پیشامدی را بنویسید که در آن حداقل ۳ نفر در مسیر رفت، سوار تاکسی هستند.

جواب الف) تعداد مسافران در مسیر رفت، ۱، ۲، ۳ یا ۴ و تعداد مسافران در مسیر برگشت، ۰، ۱، ۲، ۳ یا ۴ است؛ پس فضای نمونه‌ای تعداد مسافران در مسیر رفت‌وبرگشت عبارت است از:

$S = \{۱,۲,۳,۴\} \times \{۰,۱,۲,۳,۴\} \Rightarrow n(S) = ۴ \times ۵ = ۲۰$

ب) منظور از برآمد $(۲,۱)$ این است که در مسیر رفت، ۲ مسافر و در مسیر برگشت، ۱ مسافر داریم.

پ) اگر A پیشامد مطلوب باشد، در این‌صورت:

$A = \{۳,۴\} \times \{۰,۱,۲,۳,۴\} = \{(۳,۰),(۳,۱),\ldots,(۳,۴),(۴,۰),(۴,۱),\ldots,(۴,۴)\}$

تذکر: با توجه به مفهوم «رخ‌دادن یک پیشامد»، اگر $A_۱$ و $A_۲$ دو پیشامد باشند، آن‌گاه:

الف) اگر $A_۱ \subseteq A_۲$ باشد، یعنی از وقوع $A_۱$، وقوع $A_۲$ نتیجه می‌شود.

ب) اگر $A_۱ \cap A_۲$ رخ دهد، یعنی هر دو پیشامد $A_۱$ و $A_۲$ رخ داده است.

پ) اگر $A_۱ \cup A_۲$ رخ دهد، یعنی حداقل یکی از دو پیشامد $A_۱$ و $A_۲$ رخ داده است.

سؤال در پرتاب یک تاس سالم، کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ چرا؟

الف) اگر در پرتاب تاس، ۲ ظاهر شود، پیشامد زوج‌بودن رخ داده است.

ب) اگر در پرتاب، پیشامد ظاهرشدن عدد فرد رخ دهد، ۳ دیده شده است.

پ) اگر در پرتاب، عدد اول ظاهر شود، پیشامد کمتر از ۶ رخ داده است.

ت) از وقوع پیشامد $\{۱,۳,۵,۶\}$، وقوع پیشامدهای $\{۱,۳,۵\}$ یا $\{۳,۵,۶\}$ نتیجه می‌شود.

ث) از وقوع پیشامد $\{۱,۳,۵,۶\}$، وقوع پیشامدهای $\{۱,۳\}$ و $\{۵,۶\}$ نتیجه می‌شود.

جواب الف) درست است؛ زیرا اگر $A_۱ = \{۲\}$ و $A_۲ = \{۲,۴,۶\}$، با توجه به این‌که $A_۱ \subseteq A_۲$، بنابراین از وقوع $A_۱$، وقوع $A_۲$ نتیجه می‌شود.

ب) نادرست است؛ زیرا اگر $A_۱ = \{۱,۳,۵\}$ و $A_۲ = \{۳\}$، از وقوع $A_۱$، وقوع $A_۲$ نتیجه نمی‌شود؛ چراکه $A_۱ \nsubseteq A_۲$.

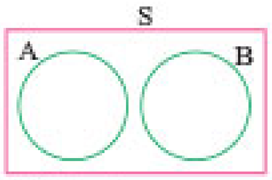
پ) درست است؛ زیرا اگر $A_۱ = \{۲,۳,۵\}$ و $A_۲ = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$، با توجه به این‌که $A_۱ \subseteq A_۲$، از وقوع $A_۱$، وقوع $A_۲$ نتیجه می‌شود.

ت) درست است؛ زیرا اگر $A_۱ = \{۱,۳,۵\}$ و $A_۲ = \{۳,۵,۶\}$، آن‌گاه $A_۱ \cup A_۲ = \{۱,۳,۵,۶\}$، از وقوع $A_۱ \cup A_۲$، وقوع $A_۱$ یا $A_۲$ نتیجه می‌شود.

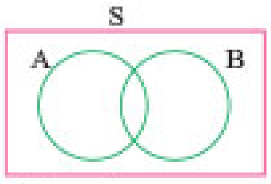
ث) نادرست است؛ زیرا اگر $A_۱ = \{۱,۳\}$ و $A_۲ = \{۵,۶\}$، آن‌گاه $A_۱ \cup A_۲ = \{۱,۳,۵,۶\}$ و از وقوع $A_۱ \cup A_۲$، وقوع $A_۱$ و $A_۲$ نتیجه نمی‌شود.

پیشامدهای سازگار و ناسازگار

اگر A و B دو پیشامد باشند و $A \cap B = \varnothing$ ، آن‌گاه A و B را «ناسازگار» یا «مجزا» می‌گوییم و اگر $A \cap B \neq \varnothing$ ، A و B را «سازگار» می‌گوییم.



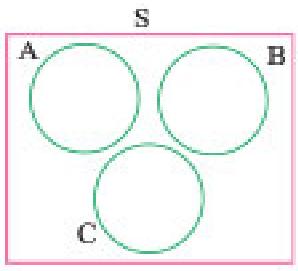
A و B دو پیشامد ناسازگار



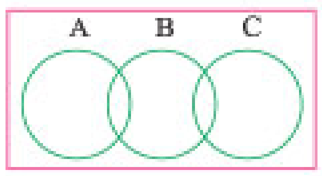
A و B دو پیشامد سازگار

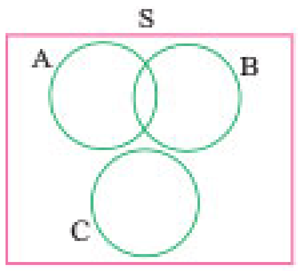
برای سه پیشامد A ، B و C نیز داریم:

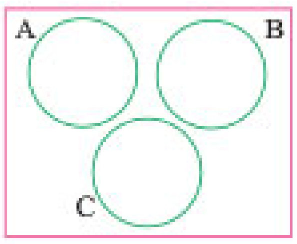
الف) اگر $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \varnothing$ ، آن‌گاه سه پیشامد را «دوبه‌دو ناسازگار» می‌گوییم.



ب) اگر $A \cap B \cap C = \varnothing$ ، آن‌گاه، سه پیشامد را «ناسازگار» می‌گوییم. شکل‌های زیر، نمونه‌هایی از این حالت هستند.







سؤال در پرتاب دو تاس، اگر A پیشامد «مجموع دو تاس ۵»، B پیشامد «متوالی‌بودن اعداد روشده» و C پیشامد «زوج‌آمدن اعداد روشده» باشد، کدام‌یک از پیشامدهای زیر، سازگار و کدام‌یک ناسازگارند؟

الف) A و B ب) A و C پ) B و C

جواب **روش اول:** در پرتاب دو تاس، اگر S فضای نمونه‌ای باشد، آن‌گاه $n(S) = ۳۶$ و پیشامدهای A ، B و C را در این فضای نمونه‌ای می‌توان نوشت و سازگاربودن یا نبودن را مشاهده کرد. واضح است که در این روش، وقت زیادی صرف می‌شود.

روش دوم: برای نشان‌دادن سازگاربودن دو پیشامد مانند A و B ، کافی است عضو مشترکی از این دو پیشامد را معرفی کنیم و برای اثبات ناسازگاری آن‌ها، یک دلیل بیاوریم.

در این مثال، با روش دوم سازگاری یا ناسازگاری را بررسی می‌کنیم.

الف) A و B سازگارند؛ زیرا عضو $(۲,۳)$ در A و B قرار دارد.

ب) A و C ناسازگارند؛ زیرا اگر زوج (x,y) در C باشد، x و y هر دو زوج هستند و جمع دو عدد زوج ۵ نمی‌شود.

پ) B و C ناسازگارند؛ زیرا اگر زوج (x,y) در B باشد، آن‌گاه x و y متوالی هستند؛ یعنی $y = x + ۱$ ، بنابراین اگر x زوج باشد، y فرد خواهد بود و برعکس؛ پس (x,y) نمی‌تواند در C باشد.

اصول احتمال

پایه‌گذاری اصول در یک علم، کار فنی و بسیار ماهرانه‌ای است؛ زیرا تمام قضیه‌ها و قواعد دیگر آن علم باید با کمک این اصول قابل اثبات و بیان باشند. در نظریهٔ احتمال و در سال ۱۹۳۳، آندره کولموگوروف (Andrey Kolmogorov) اصولی را پایه‌گذاری کرد که به‌رغم ساده‌بودن، می‌توانند تمام قضیه‌های احتمال را ثابت کنند. این اصول عبارت‌اند از:

۱ برای هر پیشامد دلخواه A، احتمال وقوع آن؛ یعنی $P(A)$ ، عددی حقیقی در بازهٔ $[۰,۱]$ است.

۲ $P(S) = ۱$ که در آن S فضای نمونه‌ای است.

۳ برای هر دو پیشامد ناسازگار A و B که $A \cap B = \varnothing$ ، داریم $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

تذکر: برای اثبات قضیه‌های مختلف در احتمال، معمولاً از اصل سوم استفاده می‌شود که لازمهٔ آن، داشتن دو پیشامد مجزا یا ناسازگار است.

قضیه: در هر فضای نمونه‌ای، گزاره‌های زیر برقرار هستند:

الف) $P(A')=1-P(A)$ (احتمال متمم)

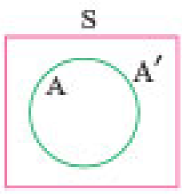
ب) $P(\varnothing)=0$

پ) اگر A، B و C پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار باشند، آن‌گاه: $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

ت) برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

ث) برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

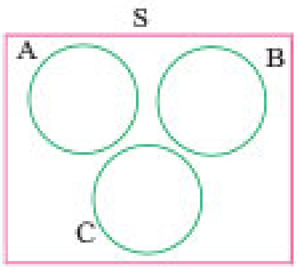
اثبات: الف) با توجه به شکل زیر، $A\cap A'=\varnothing$، یعنی A و A' ناسازگار هستند؛ پس طبق اصول احتمال داریم:



$$P(\underbrace{A\cup A'}_{S})=P(A)+P(A')\Rightarrow P(S)=P(A)+P(A')\xrightarrow{P(S)=1}1=P(A)+P(A')\Rightarrow P(A')=1-P(A)$$

ب) اگر $A=S$ باشد، آن‌گاه $A'=\varnothing$؛ پس طبق قسمت «الف» داریم: $P(A')=1-P(A)\Rightarrow P(\varnothing)=1-P(S)\Rightarrow P(\varnothing)=1-1=0$

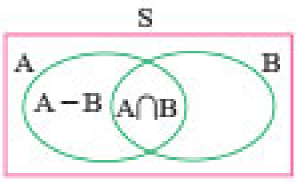
پ) با توجه به این‌که A، B و C دوبه‌دو ناسازگارند، A و $(B\cup C)$ نیز ناسازگار هستند؛ پس طبق اصول احتمال داریم:



$$P(A\cup(B\cup C))=P(A)+P(B\cup C)$$

$$\xrightarrow{B \text{ و } C \text{ ناسازگارند}}P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

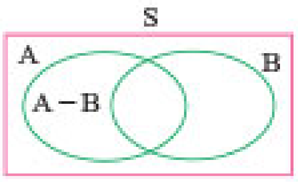
ت) با توجه به شکل زیر، $A-B$ و $A\cap B$ ناسازگارند؛ پس طبق اصول احتمال داریم:



$$P(\underbrace{(A-B)\cup(A\cap B)}_{A})=P(A-B)+P(A\cap B)\xrightarrow{(A-B)\cup(A\cap B)=A}P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

ث) با توجه به شکل زیر، $(A-B)$ و B ناسازگارند؛ پس طبق اصول احتمال داریم:



$$P(\underbrace{(A-B)\cup B}_{A\cup B})=P(A-B)+P(B)\xrightarrow{(A-B)\cup B=A\cup B}P(A\cup B)=P(A-B)+P(B)$$

با توجه به قسمت «ت»، $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$. با جای‌گذاری در رابطهٔ بالا داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

سؤال خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. احتمال این‌که این خانواده حداکثر دارای ۲ فرزند دختر باشد، چه‌قدر است؟

جواب در خانوادهٔ ۳ فرزندی، داریم $n(S)=2^3=8$. اگر A پیشامد حداکثر ۲ فرزند دختر در این خانواده باشد، پیشامد A'، یعنی ۳ فرزند دختر، به‌صورت $A'=\{(د، د، د)\}$ است؛ پس:

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

سؤال ۵۰ درصد دانش‌آموزان یک کلاس به موسیقی و ۴۰ درصد آن‌ها به تئاتر علاقه دارند. اگر ۲۴ درصد آن‌ها به هر دو رشته علاقه داشته باشند، چند درصد آن‌ها حداقل به یکی از دو رشته علاقه دارند؟

جواب اگر A و B به‌ترتیب پیشامدهای علاقه به موسیقی و تئاتر باشند، آن‌گاه $P(A)=۰/۵۰$ ، $P(B)=۰/۴۰$ و $P(A\cap B)=۰/۲۴$. احتمال علاقه‌مندی به حداقل یکی از این دو رشته، همان $P(A\cup B)$ است؛ پس:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۵۰+۰/۴۰-۰/۲۴=۰/۶۶$$

بنابراین ۶۶ درصد دانش‌آموزان، حداقل به یکی از این دو رشته علاقه‌مند هستند.

نکته: تعداد اعداد بخش‌پذیر بر k از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,...,n\}$ ، برابر با جزءصحیح $\frac{n}{k}$ ، یعنی $[\frac{n}{k}]$ است.

سؤال در مجموعهٔ اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰:

الف) چند عدد بر ۷ بخش‌پذیر است؟

ب) چند عدد بر ۵ و ۳ بخش‌پذیر است؟

پ) چند عدد بر ۴ و ۶ بخش‌پذیر است؟

ت) چند عدد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۷ وجود دارد؟

جواب الف) $[\frac{۲۰۰}{۷}]=[۲۸/۵۷]=۲۸$

ب) عددی که بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر است، بر ک.م.م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) ۳ و ۵، یعنی ۱۵ بخش‌پذیر است؛ پس تعداد این اعداد عبارت است از $[\frac{۲۰۰}{۱۵}]=۱۳$.

پ) عددی که بر ۴ و ۶ بخش‌پذیر است، بر ک.م.م ۴ و ۶، یعنی ۱۲ بخش‌پذیر است؛ پس تعداد این اعداد عبارت است از $[\frac{۲۰۰}{۱۲}]=۱۶$.

ت) اعداد سه‌رقمی در مجموعهٔ اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ عبارت‌اند از $\{۱۰۰,۱۰۱,۱۰۲,...,۲۰۰\}$. در این مجموعه، تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۷ عبارت‌اند از:

$$[\frac{۲۰۰}{۷}]-[\frac{۹۹}{۷}]=۲۸-۱۴=۱۴$$

(در رابطهٔ بالا، اعداد بخش‌پذیر بر ۷ در مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۹۹\}$ را از اعداد بخش‌پذیر بر ۷ در مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۲۰۰\}$ کم کرده‌ایم تا اعداد بخش‌پذیر بر ۷ در مجموعهٔ $\{۱۰۰,۱۰۱,...,۲۰۰\}$ به دست آید.)

سؤال عددی به‌تصادف از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را حساب کنید که عدد انتخاب‌شده:

الف) بر ۷ بخش‌پذیر باشد.

ب) بر ۶ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۴ بخش‌پذیر نباشد.

پ) بر ۳ یا ۵ بخش‌پذیر باشد.

ت) نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

جواب با توجه به این‌که $S=\{۱,۲,۳,...,۱۰۰\}$ ، داریم $n(S)=۱۰۰$.

الف) اگر A پیشامد اعداد بخش‌پذیر بر ۷ باشد، داریم $n(A)=[\frac{۱۰۰}{۷}]=۱۴$ ؛ پس:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۴}{۱۰۰}=\frac{۷}{۵۰}$$

ب) اگر A و B به‌ترتیب پیشامدهای بخش‌پذیری بر ۶ و ۴ باشند، پیشامد $A\cap B$ اعداد بخش‌پذیر بر ک.م.م ۶ و ۴، یعنی ۱۲ است؛ پس:

$$n(A)=[\frac{۱۰۰}{۶}]=۱۶\ ,\ n(B)=[\frac{۱۰۰}{۴}]=۲۵\ ,\ n(A\cap B)=[\frac{۱۰۰}{۱۲}]=۸$$

بنابراین احتمال پیشامد $A-B$ عبارت است از:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{n(A)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱۶}{۱۰۰}-\frac{۸}{۱۰۰}=\frac{۸}{۱۰۰}$$

پ) اگر A و B به‌ترتیب پیشامدهای بخش‌پذیری بر ۳ و ۵ باشند، پیشامد $A\cap B$ اعداد بخش‌پذیر بر ک.م.م آن‌ها، یعنی ۱۵ است؛ پس:

$$n(A)=[\frac{۱۰۰}{۳}]=۳۳\ ,\ n(B)=[\frac{۱۰۰}{۵}]=۲۰\ ,\ n(A\cap B)=[\frac{۱۰۰}{۱۵}]=۶$$

بنابراین احتمال پیشامد $A\cup B$ عبارت است از:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۳۳}{۱۰۰}+\frac{۲۰}{۱۰۰}-\frac{۶}{۱۰۰}=\frac{۳۳+۲۰-۶}{۱۰۰}=\frac{۴۷}{۱۰۰}$$

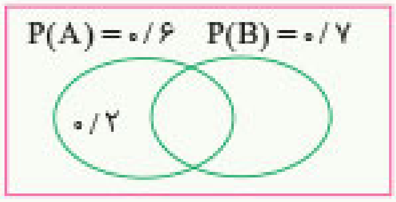
ت) اگر A و B به‌ترتیب پیشامدهای بخش‌پذیری بر ۳ و ۵ باشند، باید $P(A'\cap B')$ را به دست آوریم. از قضیهٔ احتمال متمم و قسمت «پ» همین مثال استفاده می‌کنیم:

$$P(A'\cap B')=1-P(A'\cap B')'=1-P(A\cup B)=1-\frac{۴۷}{۱۰۰}=\frac{۵۳}{۱۰۰}$$

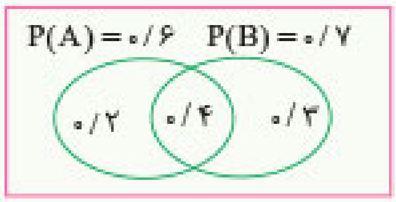
سؤال اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به‌طوری که $P(A)=۰/۶$ ، $P(B)=۰/۷$ و $P(A\cap B')=۰/۲$، آن‌گاه حاصل $P(A'\cap B)$ را به دست آورید.

جواب **روش اول:** با توجه به این‌که:
$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=۰/۲\Rightarrow ۰/۶-P(A\cap B)=۰/۲$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۶-۰/۲=۰/۴$$
پس داریم:
$$P(A'\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=۰/۷-۰/۴=۰/۳$$

روش دوم: (استفاده از نمودار وِن) نمودار وِن $P(A)$ و $P(B)$ را با توجه به اطلاعات داده‌شده رسم می‌کنیم:



اکنون می‌توانیم با کمک اصول احتمال (پیشامدهای ناسازگار)، احتمال قسمت‌های خالی را بنویسیم:



بنابراین $P(A\cap B)=۰/۴$ و $P(B-A)=P(B\cap A')=۰/۳$ است.

روش سوم: (استفاده از جدول) در یک جدول که شامل پیشامدهای A و B به همراه متمم‌های آن‌ها است، اطلاعات داده‌شده را وارد می‌کنیم:

	A	A'	
B			۰/۷
B'	۰/۲		
	۰/۶		۱

سلول‌هایی که از برخورد A و A' با B و B' ایجاد می‌شوند، همان احتمال اشتراک آن‌ها هستند. مثلاً سلول اشتراک A و B'، همان $P(A\cap B')$ است. مجموع هر سطر در سمت راست آن و مجموع هر ستون در پایین آن نوشته می‌شود. مجموع کل، یعنی «۱» نیز در کنج پایین (سمت راست) به‌صورت پیش فرض نوشته می‌شود. با پر کردن سلول‌های خالی، داریم $P(A'\cap B)=۰/۳$.

	A	A'	
B	۰/۴	۰/۳	۰/۷
B'	۰/۲	۰/۱	۰/۳
	۰/۶	۰/۴	۱

سؤال سکه‌ای را ۵ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که حداکثر ۴ بار رو دیده شود، چه‌قدر است؟

جواب در پرتاب ۵ سکه داریم:
$$S=\{ر,پ\}\times\{ر,پ\}\times\{ر,پ\}\times\{ر,پ\}\times\{ر,پ\}\Rightarrow n(S)=۲^۵=۳۲$$
اگر A پیشامد مشاهدهٔ حداکثر ۴ بار رو باشد، در این‌صورت متمم آن، یعنی A' پیشامدی است که هر ۵ سکه، رو آمده است؛ پس:
$$A'=\{(ر,ر,ر,ر,ر)\}\Rightarrow n(A')=۱$$
بنابراین $P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۱}{۳۲}$ و داریم:
$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۳۲}=\frac{۳۱}{۳۲}$$

سؤالات امتحانی

سؤالات درست و نادرست

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۹۹. سؤال «چه تعداد از دانش‌آموزان کلاس شما، نمرهٔ کامل گرفته‌اند؟» مربوط به علم احتمال است. ☐ ☐

۱۰۰. در پرتاب یک تاس، وقوع پیشامد روشدن یک عدد فرد، وقوع پیشامد روشدن عدد ۳ را نتیجه می‌دهد. (نهایی ۱۴۰۳ - خارج) ☐ ☐

۱۰۱. سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد هر سه بار مشابه و B پیشامد زوج بار رو باشد، آن‌گاه A و B ناسازگارند. ☐ ☐

۱۰۲. اگر A و B دو پیشامد دلخواه در پرتاب یک تاس باشند و $P(A)\leq P(B)$ ، آن گاه $A\subseteq B$. ☐ ☐

سؤالات جای خالی

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

۱۰۳. «می‌دانیم ۷ لامپ از ۱۰ لامپ یک جعبه سالم است. چند لامپ برداریم تا مطمئن باشیم حداقل یک لامپ سالم برداشته‌ایم؟»، مربوط به علم .... است. (آمار / احتمال)

۱۰۴. اگر یک تاکسی، ۴ نفر ظرفیت مسافر داشته باشد، فضای نمونه‌ای تعداد مسافران رفت‌وبرگشت، .... عضو دارد.

۱۰۵. طبق اصول احتمال، اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آن‌گاه .... $= P(A \cup B)$.

مسائل

۱۰۶. کدام‌یک از پرسش‌های زیر مربوط به علم آمار و کدام‌یک مربوط به علم احتمال است؟ چرا؟ (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

الف) درآمد کارمندان بانک چه‌قدر است؟

ب) در یک کلاس ۳۰ نفری، چه تعداد به والیبال علاقه دارند؟

پ) در مدرسهٔ ۲۵۰ نفری شما، ۱۵۰ نفر در یک خانوادهٔ ۲ فرزندی زندگی می‌کنند. اگر از بین تمام دانش‌آموزان ۲۰ نفر را انتخاب کنیم، چه‌قدر امکان دارد که ۱۵ نفر از خانواده‌های ۲ فرزندی باشند؟

ت) ۱۵ درصد از افراد یک شهر، بیماری پوستی دارند. اگر از ۲۰ نفر دربارهٔ داشتن یا نداشتن این بیماری سؤال پرسیده شود، چه‌قدر ممکن است که پاسخ بیش از ۳ نفر مثبت باشد؟

۱۰۷. پنج کتاب متمایز در یک قفسه کنار یکدیگر قرار می‌گیرند؛

الف) فضای نمونهٔ این آزمایش را توصیف کرده و تعداد اعضای آن را بنویسید.

ب) تعداد اعضای پیشامدی که دو کتاب خاص کنار یکدیگر باشند، چه‌قدر است؟

۱۰۸. یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو عضوی برابر نیست. فرض کنید آن‌ها یکی پس از دیگری وارد سالن می‌شوند. اگر برای ما فقط قد آن‌ها اهمیت داشته باشد. (مشابه تمرین کتاب درسی)

الف) فضای نمونه‌ای را توصیف کرده و تعداد اعضای آن را به دست آورید.

ب) اگر اعضای تیم به‌صورت تصادفی وارد سالن شوند، احتمال این‌که اولین فرد واردشده، بلندقدترین عضو تیم باشد، چه‌قدر است؟

پ) احتمال این‌که اولین فرد واردشده، بلندقدترین و آخرین فرد واردشده، کوتاه‌قدترین عضو تیم باشند، چه‌قدر است؟

۱۰۹. طبق پیش‌بینی هواشناسی، هوای فردا در ساعت‌های مختلف، آفتابی، نیمه‌ابری یا ابری است و هوای دو روز بعد، نیمه‌ابری یا ابری است؛ (مشابه تمرین کتاب درسی)

الف) فضای نمونه‌ای هواشناسی را برای دو روز آینده توصیف کرده و تعداد اعضای آن را بنویسید.

ب) پیشامد آن را بنویسید که هوای پس‌فردا ابری باشد.

۱۱۰. علی و احمد با هم یک‌مرتبه، بازی سنگ، کاغذ، قیچی بازی می‌کنند؛ (تمرین کتاب درسی)

الف) فضای نمونه‌ای برای این بازی را توصیف کرده و تعداد اعضای آن را به دست آورید.

ب) در چه تعداد از برآمدها احمد برندهٔ بازی است؟

۱۱۱. یک سکه را به هوا پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید، یک سکه و در غیر این‌صورت، یک تاس را می‌ریزیم.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را نوشته و تعداد اعضای آن را بنویسید.

ب) پیشامد آن را بنویسید که حداقل یک «رو» مشاهده شود.

پ) پیشامدی را بنویسید که عدد تاس حداقل «۳» باشد.

۱۱۲. یک تاس را به هوا پرتاب می‌کنیم. اگر عدد روشده کمتر از ۳ باشد، یک سکه و در غیر این‌صورت، دو سکه را پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ای را توصیف کرده و تعداد اعضای آن را بنویسید.

ب) پیشامدی را بنویسید که دو بار «رو» دیده شود.

پ) پیشامدی را بنویسید که تاس مضرب ۳ باشد.

۱۱۳. در پرتاب یک تاس سالم، کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ چرا؟ (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

الف) از وقوع پیشامد $\{3\}$، وقوع پیشامد مضارب ۳ نتیجه می‌شود.

ب) اگر پیشامد بزرگ‌تر از ۳ رخ دهد، پیشامد کمتر از ۵ نیز رخ داده است.

پ) اگر پیشامد $\{2,4,6\}$ رخ دهد، پیشامدهای $\{2,4\}$ و $\{4,6\}$ نیز رخ داده‌اند.

ت) اگر پیشامد $\{1,5\}$ رخ دهد، یعنی پیشامدهای $\{1,3,5\}$ و $\{1,4,5\}$ نیز رخ داده‌اند.

ث) اگر پیشامد $\{4,5,6\}$ رخ دهد، یعنی پیشامدهای $\{4,5\}$ یا $\{4,6\}$ رخ داده‌اند.

۱۱۴. در پرتاب دو تاس، اگر A پیشامد «اول‌بودن اعداد روشده» و B پیشامد «زوج بودن حاصل‌ضرب اعداد روشده» باشد، A و B سازگارند یا ناسازگار؟ چرا؟ (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۱۱۵. تاسی را پی‌درپی پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد «برای اولین بار در مرتبهٔ سوم ۶ بیاید.» و B پیشامد «تا پرتاب سوم دو بار ۶ بیاید.» باشد، A و B سازگارند یا ناسازگار؟ چرا؟ (کار در کلاس کتاب درسی)

۱۱۶. سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد «هر سه بار مشابه بیاید.» و B پیشامد «زوج بار رو بیاید.» باشد، A و B سازگارند یا ناسازگار؟ چرا؟ (کار در کلاس کتاب درسی)

۱۱۷. از کیسه‌ای که محتوای آن ۳ مهرهٔ سفید، ۲ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ قرمز است، ۳ مهره به‌تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن را حساب کنید که ۱ مهره سفید یا ۱ مهره سیاه باشد.

+۲۰ ۱۱۸. از بین ۵ دانش‌آموز پایهٔ دهم، ۲ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم و ۳ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم، ۳ دانش‌آموز انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که حداقل یک دانش‌آموز پایهٔ دهم داشته باشیم، چه‌قدر است؟

۱۱۹. عددی به‌تصادف از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را حساب کنید که: (تمرین کتاب درسی)

الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد.

ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش‌پذیر باشد؛ ولی بر ۳ بخش‌پذیر نباشد.

پ) عدد انتخابی نه بر ۲ و نه بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

۱۲۰. از بین اعداد متوالی $\{۵۱,۵۲,...,۱۰۰\}$ عددی به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را حساب کنید که عدد انتخاب‌شده: (مشابه تمرین کتاب درسی)

الف) بر ۵ یا ۶ بخش‌پذیر باشد.

ب) بر ۵ یا ۶ بخش‌پذیر باشد؛ ولی بر ۳۰ بخش‌پذیر نباشد.

۱۲۱. عددی به‌تصادف از بین اعداد دورقمی انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخابی بر ۴ یا ۶ بخش‌پذیر باشد، چه‌قدر است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

+۲۰ ۱۲۲. از بین اعداد طبیعی سه‌رقمی، به‌تصادف یک عدد انتخاب کرده‌ایم. با کدام احتمال، لااقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر شده است؟

۱۲۳. دو تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک عدد مضرب ۳ یا مجموع دو عدد روشده برابر ۷ است؟ (برگرفته از کنکور ریاضی خارج ۱۴۰۱)

+۲۰ ۱۲۴. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال، عدد ظاهرشدهٔ یکی از تاس‌ها اول بوده و مجموع آن‌ها حداقل ۶ است؟ (برگرفته از کنکور ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۳)

+۲۰ ۱۲۵. در پرتاب هم‌زمان دو تاس، اعداد روشده m و n هستند. با کدام احتمال معادلهٔ $x^۲ - mx + n = ۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز است؟ (برگرفته از کنکور ریاضی ۱۴۰۲)

۱۲۶. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A) = ۳P(B) = ۴P(A \cap B)$، آن‌گاه مقدار $P(A \cup B)$ چند برابر $P(A \cap B)$ است؟

۱۲۷. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A-B) = ۰/۶$ و $P(B) = ۰/۳$، حاصل $P(A \cup B)$ را به دست آورید.

۱۲۸. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A) = ۰/۳$، $P(B) = ۰/۵$ و $P(A-B) = ۰/۲$، حاصل $P(A \cup B')$ را به دست آورید.

+۲۰ ۱۲۹. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند که $۳P(A) = ۴P(B) = ۹P(A' \cap B') = ۳۶P(A \cap B)$، حاصل $P(A' \cap B)$ را به دست آورید.

۱۳۰. فرض کنید A و B دو پیشامد هستند، با استفاده از اصول احتمال ثابت کنید: (تمرین کتاب درسی)

الف) اگر $B \subseteq A$، آن‌گاه $P(A-B) = P(A) - P(B)$.

ب) اگر $B \subseteq A$، آن‌گاه $P(B) \leq P(A)$.

۱۳۱. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $P(B) \leq P(A)$، آیا می‌توان نتیجه گرفت که $B \subseteq A$ است؟ چرا؟

+۲۰ ۱۳۲. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A-B) = P(A) - P(B)$ ثابت کنید که $B \subseteq A$ است.

+۲۰ ۱۳۳. اگر احتمال رخ‌دادن پیشامدهای A و B به‌ترتیب ۰/۶۳ و ۰/۵۹ و احتمال رخ‌دادن هم‌زمان آن‌ها کمترین مقدار ممکن باشد، احتمال آن‌که فقط پیشامد A رخ دهد را به دست آورید.

+۲۰ ۱۳۴. اگر $P(A-B) = \frac{۳}{۷}$ و $P(B-A) = \frac{۱}{۷}$ باشد، کمترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ کدام است؟ (برگرفته از کنکور ریاضی خارج ۱۴۰۲)

+۲۰ ۱۳۵. در یک گروه ۱۵۰ نفری دانش‌آموزی، ۴۰ نفر فقط بلیت فیلم «الف» و ۷۵ نفر فقط بلیت فیلم «ب» را خریداری کرده‌اند. اگر $P(A)$ و $P(B)$ به‌ترتیب احتمال خرید بلیت فیلم‌های «الف» و «ب» باشند، بیشترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ کدام است؟ (برگرفته از کنکور ریاضی ۱۴۰۲)

+۲۰ ۱۳۶. اگر A و B دو پیشامد فضای نمونه‌ای S باشند، نشان دهید که:

الف) $\max(P(A)+P(B)-۱, ۰) \leq P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B))$

ب) $\max(P(A), P(B)) \leq P(A \cup B) \leq \min(۱, P(A)+P(B))$

+۲۰ ۱۳۷. اگر A و B دو پیشامد باشند و $P(A) = ۰/۳$ و $P(B) = ۰/۶$، حداقل و حداکثر هر یک از احتمال‌های زیر را به دست آورید.

الف) $P(A \cap B)$ ب) $P(A \cup B)$

پاسخ فصل دوم

۹۹. نادرست این سؤال مربوط به علم آمار است؛ زیرا جامعه نامعلوم است.

۱۰۰. نادرست اگر A_1 پیشامد روشدن عدد فرد و A_2 پیشامد روشدن عدد ۳ باشد، باتوجه به این‌که $A_2 \subseteq A_1$، وقوع A_2، وقوع A_1 را نتیجه می‌دهد و نه برعکس.

۱۰۱. نادرست عضو (پ , پ , پ)، یعنی هر سه بار پشت بیاید، در A و B قرار دارد؛ پس A و B ناسازگار نیستند.

۱۰۲. نادرست اگر $A=\{۲\}$ و $B=\{۳,۶\}$، آن‌گاه $P(A)=\frac{۱}{۶}$ و $P(B)=\frac{۲}{۶}$؛ پس $P(A)\le P(B)$، ولی $A\subseteq B$ نیست.

۱۰۳. احتمال؛ زیرا در این سؤال، جامعه معلوم و نمونه، نامعلوم است.

۱۰۴. ۲۵؛ زیرا فضای نمونه‌ای عبارت است از $S=\{۰,۱,۲,۳,۴\}\times\{۰,۱,۲,۳,۴\}$؛ پس $n(S)=۵\times۵=۲۵$.

۱۰۵. $P(A)+P(B)$ (اصل سوم از اصل احتمال)

۱۰۶. الف علم آمار؛ زیرا جامعه نامعلوم است.

ب علم آمار؛ زیرا جامعه نامعلوم است. (تعداد علاقه‌مندان به والیبال در کلاس مشخص نیست.)

پ علم احتمال؛ زیرا جامعه معلوم است؛ ولی در نمونهٔ انتخاب‌شده، تعداد خانواده‌های ۲ نفره معلوم نیست.

ت علم احتمال؛ زیرا جامعه معلوم است؛ ولی در نمونهٔ انتخاب‌شده، تعداد پاسخ‌های مثبت مشخص نیست.

۱۰۷. الف فضای نمونه‌ای، چیدمان‌های مختلف این ۵ کتاب کنار یکدیگر است که آن را جایگشت ۵ کتاب نیز می‌گوییم؛ بنابراین $n(S)=۵!=۱۲۰$.

ب اگر ۵ کتاب متمایز را $B_1, B_2, \dots, B_5$ بنامیم و دو کتابی که قرار است کنار یکدیگر باشند را B_1 و B_2 در نظر بگیریم، B_1 و B_2 را در یک بسته در نظر می‌گیریم و به همراه سه کتاب دیگر، ۴ شیء خواهیم داشت. اگر A این پیشامد باشد، آن‌گاه $n(A)=۴!\times۲!=۴۸$ که $۲!$ جایگشت دو کتاب درون بسته است.

۱۰۸. الف اگر S فضای نمونه‌ای ترتیب مختلف ورود افراد به سالن باشد، این مجموعه همان جایگشت ۱۴ نفر خواهد بود؛ پس $n(S)=۱۴!$.

ب اگر A پیشامد این باشد که اولین نفر واردشده به سالن، قدبلندترین فرد است، پس A همان جایگشت ۱۳ نفر دیگر است؛ بنابراین $n(A)=۱۳!$.

پ اگر B پیشامد این باشد که اولین نفر واردشده، بلندقدترین و آخرین نفر واردشده، کوتاه‌قدترین هستند، پس B همان جایگشت ۱۲ نفر دیگر است؛ بنابراین $n(B)=۱۲!$.

۱۰۹. الف

$$S=\{\text{آفتابی, ابری, نیمه ابری}\}\times\{\text{ابری, نیمه ابری}\}\Rightarrow n(S)=۳\times۲=۶$$

ب اگر A پیشامد ابری بودن پس‌فردا باشد، آن‌گاه:

$$A=\{\text{آفتابی, ابری, نیمه ابری}\}\times\{\text{ابری}\}$$

۱۱۰. الف اگر ابتدا برآمد احمد و سپس برآمد علی را نشان دهیم، آن‌گاه:

$$S=\{\text{سنگ و کاغذ و قیچی}\}\times\{\text{سنگ و کاغذ و قیچی}\}\Rightarrow n(S)=۳\times۳=۹$$

ب اگر A پیشامد این باشد که احمد برندهٔ بازی باشد؛ آن‌گاه:

$$A=\{(\text{سنگ و کاغذ}), (\text{کاغذ و قیچی}), (\text{قیچی و سنگ})\}$$

پس $n(A)=۳$.

۱۱۱. الف

$$S=(\{\text{رو}\}\times\{\text{پشت و رو}\})\cup(\{\text{پشت}\}\times\{۱,۲,۳,\dots,۶\})$$

$$\Rightarrow n(S)=(۱\times۲)+(۱\times۶)=۲+۶=۸$$

به کمک نمودار درختی نیز می‌توان فضای نمونه‌ای را نشان داد:

ب اگر A پیشامد حداقل یک رو باشد، آن‌گاه با توجه به فضای نمونه‌ای S داریم:

$A=\{(\text{ر , ر}), (\text{ر , پ})\}$

پ اگر B پیشامد آن باشد که عدد تاس حداقل ۳ باشد، آن‌گاه با توجه به فضای نمونه‌ای S داریم:

$B=\{(\text{پ}, ۳), (\text{پ}, ۴), (\text{پ}, ۵), (\text{پ}, ۶)\}$

۱۱۲. الف

$$S=(\{۱,۲\}\times\{\text{رو, پشت}\}\times\{\text{رو, پشت}\})\cup(\{۳,۴,۵,۶\}\times\{\text{رو, پشت}\}\times\{\text{رو, پشت}\})$$

$$\Rightarrow n(S)=(۲\times۲)+(۴\times۲\times۲)=۴+۱۶=۲۰$$

ب اگر A پیشامد مشاهدهٔ دو بار «رو» باشد، آن‌گاه با توجه به فضای نمونه‌ای S داریم:

$A=\{(۳,\text{ر},\text{ر}), (۴,\text{ر},\text{ر}), (۵,\text{ر},\text{ر}), (۶,\text{ر},\text{ر})\}$

پ اگر B پیشامد مشاهدهٔ مضرب ۳ در تاس باشد، آن‌گاه با توجه به فضای نمونه‌ای S داریم:

$B=\{(۳,\text{ر},\text{ر}), (۳,\text{ر},\text{پ}), (۳,\text{پ},\text{ر}), (۳,\text{پ},\text{پ}), (۶,\text{ر},\text{ر}), (۶,\text{ر},\text{پ}), (۶,\text{پ},\text{ر}), (۶,\text{پ},\text{پ})\}$

۱۱۳. الف: درست زیرا اگر $A_1=\{۳\}$ و $A_2=\{۳,۶\}$، آن‌گاه $A_1\subseteq A_2$.

ب: نادرست زیرا اگر $A_1=\{۴,۵,۶\}$ و $A_2=\{۱,۲,۳,۴\}$، آن‌گاه $A_1\nsubseteq A_2$.

پ: نادرست زیرا اگر $A_1=\{۲,۴,۶\}$، $A_2=\{۲,۴\}$ و $A_3=\{۴,۶\}$، آن‌گاه $A_1\nsubseteq A_2$ و $A_1\nsubseteq A_3$.

ت: درست زیرا اگر $A_1=\{۱,۵\}$، $A_2=\{۱,۳,۵\}$ و $A_3=\{۱,۴,۵\}$، آن‌گاه $A_1\subseteq A_2$ و $A_1\subseteq A_3$.

ث: درست زیرا اگر $A_1=\{۴,۵\}$ و $A_2=\{۴,۶\}$ و پیشامد $A_1\cup A_2$ رخ دهد، آن‌گاه A_1 یا A_2 رخ داده است.

۱۱۴. سازگارند؛ زیرا $(۲,۳)$ در هر دو پیشامد A و B قرار دارد.

۱۱۵. ناسازگارند؛ زیرا A و B شامل عضوهایی به شکل زیر هستند که اشتراکی با هم ندارند:

$A:$ (دلخواه , ... , دلخواه , ۶ , غیر ۶ , غیر ۶)

$B:$ (دلخواه , ... , دلخواه , دلخواه , ۶ , ۶)

۱۱۶. سازگارند؛ زیرا عضو (پ , پ , پ) در A و B قرار دارد. دقت کنید که به خاطر وجود سه بار پشت، «صفر» مرتبه رو آمده است و صفر عددی زوج است.

۱۱۷. اگر A پیشامد «۱ مهرهٔ سفید» و B پیشامد «۱ مهرهٔ سیاه» باشد، باید $P(A\cup B)$ را حساب کنیم.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۲}}{\binom{۸}{۳}}+\frac{\binom{۲}{۱}\binom{۶}{۲}}{\binom{۸}{۳}}-\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۳}}=\frac{۳۰}{۵۶}+\frac{۳۰}{۵۶}-\frac{۱۸}{۵۶}$$

$$=\frac{۴۲}{۵۶}=\frac{۳}{۴}$$

۱۱۸. تعداد کل دانش‌آموزان عبارت است از $۱۰ = ۳ + ۲ + ۵$. اگر A پیشامد حداقل یک دانش‌آموز دهم در انتخاب ۳ دانش‌آموز از کل افراد باشد، A' پیشامد این خواهد بود که دانش‌آموز دهم انتخاب نشود؛ پس با توجه به این‌که ۵ دانش‌آموز غیردهم داریم، احتمال A' عبارت است از:

$$P(A') = \frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۱۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۱۲}$$

بنابراین داریم:

$$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱۱}{۱۲}$$

۱۱۹. اگر A پیشامد اعداد بخش‌پذیر بر ۲ و B پیشامد اعداد بخش‌پذیر بر ۳ در مجموعهٔ $S = \{۱, ۲, ..., ۱۰۰\}$ باشد، در این صورت $A \cap B$ پیشامد اعداد بخش‌پذیر بر ۶ خواهد بود و داریم:

الف

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{[\frac{۱۰۰}{۲}]}{۱۰۰} + \frac{[\frac{۱۰۰}{۳}]}{۱۰۰} - \frac{[\frac{۱۰۰}{۶}]}{۱۰۰} = \frac{۵۰ + ۳۳ - ۱۶}{۱۰۰} = \frac{۶۷}{۱۰۰}$$

ب

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{[\frac{۱۰۰}{۲}]}{۱۰۰} - \frac{[\frac{۱۰۰}{۶}]}{۱۰۰} = \frac{۵۰ - ۱۶}{۱۰۰}$$

$$= \frac{۳۴}{۱۰۰}$$

پ

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = ۱ - P(A \cup B) = ۱ - \frac{۶۷}{۱۰۰} = \frac{۳۳}{۱۰۰}$$

۱۲۰. اگر A و B به‌ترتیب پیشامدهای اعداد بخش‌پذیر بر ۵ و ۶ در مجموعهٔ $S = \{۵۱, ۵۲, ..., ۱۰۰\}$ باشند، در این صورت $A \cap B$ پیشامد اعداد بخش‌پذیر بر ۳۰ خواهد بود. با توجه به این‌که $n(S) = (۱۰۰ - ۵۱) + ۱ = ۵۰$، داریم:

الف

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{[\frac{۱۰۰}{۵}] - [\frac{۵۰}{۵}]}{۵۰} + \frac{[\frac{۱۰۰}{۶}] - [\frac{۵۰}{۶}]}{۵۰} - \frac{[\frac{۱۰۰}{۳۰}] - [\frac{۵۰}{۳۰}]}{۵۰}$$

$$= \frac{(۲۰ - ۱۰) + (۱۶ - ۸) - (۳ - ۱)}{۵۰} = \frac{۱۰ + ۸ - ۲}{۵۰} = \frac{۱۶}{۵۰} = \frac{۸}{۲۵}$$

ب

$$P((A \cup B) - (A \cap B)) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - ۲P(A \cap B)$$

$$= \frac{(۲۰ - ۱۰)}{۵۰} + \frac{(۱۶ - ۸)}{۵۰} - ۲ \times \frac{۳ - ۱}{۵۰} = \frac{۱۰ + ۸ - ۴}{۵۰} = \frac{۱۴}{۵۰} = \frac{۷}{۲۵}$$

۱۲۱. فضای نمونه‌ای S، مجموعهٔ اعداد دورقمی، یعنی $S = \{۱۰, ۱۱, ۱۲, ..., ۹۹\}$ است؛ پس $n(S) = (۹۹ - ۱۰) + ۱ = ۹۰$. اگر A و B به‌ترتیب پیشامدهای اعداد بخش‌پذیر بر ۴ و ۶ در S باشند، در این صورت $A \cap B$ پیشامد اعداد بخش‌پذیر بر ک.م.م ۴ و ۶، یعنی ۱۲ خواهد بود و داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{[\frac{۹۹}{۴}] - [\frac{۹}{۴}]}{۹۰} + \frac{[\frac{۹۹}{۶}] - [\frac{۹}{۶}]}{۹۰} - \frac{[\frac{۹۹}{۱۲}] - [\frac{۹}{۱۲}]}{۹۰}$$

$$= \frac{۲۴ - ۲}{۹۰} + \frac{۱۶ - ۱}{۹۰} - \frac{۸ - ۰}{۹۰} = \frac{۲۲ + ۱۵ - ۸}{۹۰} = \frac{۲۹}{۹۰}$$

۱۲۲. تعداد کل اعداد سه‌رقمی، ۹۰۰ عدد است که از مجموعهٔ $S = \{۱۰۰, ۱۰۱, ۱۰۲, ..., ۹۹۹\}$ انتخاب می‌شود. اگر A پیشامد این باشد که عدد انتخابی از S، لااقل یک بار رقم ۲ داشته باشد، پیشامد A'، شامل اعدادی است که رقم ۲ دیده نشود؛ پس:

$$A' : \underset{\text{صدگان}}{\frac{۸}{\{۱, ۳, ۴, ۵, ..., ۹\}}} \times \underset{\text{دهگان}}{\frac{۹}{\{۰, ۱, ۳, ۴, ..., ۹\}}} \times \underset{\text{یکان}}{\frac{۹}{\{۰, ۱, ۳, ۴, ..., ۹\}}}$$

$$\Rightarrow n(A') = ۸ \times ۹ \times ۹ = ۶۴۸$$

بنابراین داریم:

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{۶۴۸}{۹۰۰} \Rightarrow P(A) = ۱ - P(A') = \frac{۲۵۲}{۹۰۰} = \frac{۷}{۲۵}$$

۱۲۳. در پرتاب دو تاس با یکدیگر، $n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶$ است. اگر A پیشامد «حداقل یک عدد مضرب ۳» و B پیشامد «مجموع دو عدد روشده برابر ۷» باشد، باید $P(A \cup B)$ را به دست آوریم.

می‌توانیم پیشامدهای A و B را جداگانه به‌دست آورده و با محاسبهٔ $A \cap B$، حاصل $P(A \cup B)$ را از فرمول $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ به دست آوریم.

همچنین می‌توانیم زوج‌هایی را بنویسیم که در A یا B باشند و مستقیماً $P(A \cup B)$ را به دست آوریم. از این روش داریم:

$$A \cup B = \{(۱, ۳), (۱, ۶), (۲, ۳), (۲, ۵), (۲, ۶), (۳, ۱), ..., (۳, ۶), (۴, ۳), (۴, ۶), (۵, ۲), (۵, ۳), (۵, ۶), (۶, ۱), ..., (۶, ۶)\}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{۲۲}{۳۶} = \frac{۱۱}{۱۸}$$

۱۲۴. اگر S فضای نمونه‌ای پرتاب ۲ تاس باشد، آن‌گاه $n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶$. اکنون حالت‌های مختلف پیشامد این‌که «یکی از تاس‌ها اول بوده و مجموع آن‌ها حداقل ۶ باشد» را در جدول زیر می‌نویسیم:

تاس اول	تاس دوم
۱	۵
۲	۴,۵,۶
۳	۳,۴,۵,۶
۴	۲,۳,۵
۵	۱,۲,۳,۴,۵,۶
۶	۲,۳,۵

بنابراین اگر A این پیشامد باشد، آن‌گاه:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۰}{۳۶} = \frac{۵}{۹}$$

۱۲۵. برای این‌که معادلهٔ $x^۲ - mx + n = ۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز باشد، باید $\Delta > ۰$؛ پس:

$$b^۲ - ۴ac > ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴n > ۰ \Rightarrow m^۲ > ۴n$$

اگر m و n را به‌ترتیب، نتیجهٔ تاس‌های اول و دوم بگیریم، حالت‌های ممکن برای (m, n) که $m^۲ > ۴n$ باشد، عبارت است از:

$$A = \{(۳, ۱), (۳, ۲), (۴, ۱), (۴, ۲), (۴, ۳), (۵, ۱), ..., (۵, ۶), (۶, ۱), ..., (۶, ۶)\}$$

پس $n(A) = ۱۷$ و داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۷}{۳۶}$$

۱۲۶. اگر $P(A\cap B)=x$، آن‌گاه $P(A)=۴x$ و $P(B)=\frac{۴}{۳}x$؛ بنابراین داریم:

$$\frac{P(A\cup B)}{P(A\cap B)}=\frac{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}{P(A\cap B)}=\frac{۴x+\frac{۴}{۳}x-x}{x}$$

$$=\frac{۳x+\frac{۴}{۳}x}{x}=\frac{\frac{۱۳}{۳}x}{x}=\frac{۱۳}{۳}$$

۱۲۷.

$$P(A-B)=۰/۶\Rightarrow P(A)-P(A\cap B)=۰/۶$$

$$P(A\cup B)=\underbrace{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}_{۰/۶}=۰/۶+P(B)$$

$$=۰/۶+۰/۳=۰/۹$$

۱۲۸.

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')$$

$$=P(A)+(۱-P(B))-P(A-B)$$

$$=۰/۳+(۱-۰/۵)-۰/۲$$

$$=۰/۳+۰/۵-۰/۲=۰/۶$$

۱۲۹.

$$۳P(A)=۴P(B)=۹P(A'\cap B')=۳۶P(A\cap B)$$

$$\xrightarrow{P(A\cap B)=x}\begin{cases}۳P(A)=۳۶x\Rightarrow P(A)=۱۲x\\ ۴P(B)=۳۶x\Rightarrow P(B)=۹x\\ ۹P(A'\cap B')=۳۶x\Rightarrow P(A'\cap B')=۴x\\ \qquad\Rightarrow ۱-P(A\cup B)=۴x\\ \qquad\Rightarrow P(A\cup B)=۱-۴x\end{cases}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow ۱-۴x=۱۲x+۹x-x$$

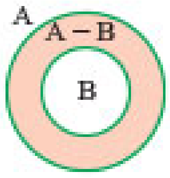
$$\Rightarrow ۲۴x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۲۴}$$

بنابراین داریم:

$$P(A'\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$$

$$=۹x-x=۸x=۸\times\frac{۱}{۲۴}=\frac{۱}{۳}$$

۱۳۰. **الف** اگر $B\subseteq A$ باشد، با توجه به شکل مقابل داریم:



$$A=(A-B)\cup B$$

از طرفی چون $A-B$ و B دو مجموعهٔ مجزا (ناسازگار) هستند، طبق اصول احتمال داریم:

$$P(\underbrace{(A-B)\cup B)}_{A})=P(A-B)+P(B)$$

$$\Rightarrow P(A)=P(A-B)+P(B)$$

$$\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(B)$$

ب با توجه به قسمت «الف» داریم:

$$P(A-B)=P(A)-P(B)\Rightarrow P(A)=P(B)+P(A-B)$$

$$\xrightarrow{P(A-B)\geq ۰}P(B)\leq P(A)$$

۱۳۱. خیر؛ مثلاً در پرتاب یک تاس، اگر $A=\{۲,۴,۶\}$ و $B=\{۱\}$، آن‌گاه:

$$P(A)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}\ ,\ \ P(B)=\frac{۱}{۶}$$

بنابراین $P(B)\leq P(A)$، ولی $B\subseteq A$ نیست.

۱۳۲. از قبل می‌دانیم که $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$، با مقایسهٔ این تساوی با تساوی داده‌شده، یعنی $P(A-B)=P(A)-P(B)$، داریم $P(A\cap B)=P(B)$.

اگر $A\cap B\neq B$ باشد، آن‌گاه $A\cap B\subset B$، بنابراین $P(A\cap B)<P(B)$ که خلاف نتیجهٔ بالا است؛ پس $A\cap B=B$ خواهد بود و داریم $B\subseteq A$.

۱۳۳.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\xrightarrow{P(A\cup B)\leq ۱}P(A)+P(B)-P(A\cap B)\leq ۱$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)\geq P(A)+P(B)-۱$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)\geq ۰/۶۳+۰/۵۹-۱$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)\geq ۰/۲۲$$

با توجه به فرض مسئله، کمترین مقدار $P(A\cap B)$ برابر با $۰/۲۲$ خواهد بود؛ بنابراین احتمال آن‌که فقط پیشامد A رخ دهد عبارت است از:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=۰/۶۳-۰/۲۲=۰/۴۱$$

۱۳۴. با توجه به مجزا بودن پیشامدهای $(A-B)$ و $(A\cap B)$ و همچنین پیشامدهای $(B-A)$ و $(A\cap B)$ داریم:

$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{P[(A-B)\cup(A\cap B)]}{P[(B-A)\cup(A\cap B)]}=\frac{P(A-B)+P(A\cap B)}{P(B-A)+P(A\cap B)}$$

اگر $P(A\cap B)=x$، با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{۳}{۷}+x}{\frac{۱}{۷}+x}=\frac{\frac{۳+۷x}{۷}}{\frac{۱+۷x}{۷}}=\frac{۳+۷x}{۱+۷x}$$

برای یافتن کمترین مقدار کسر بالا، صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{۳+۷x}{۱+۷x}=\frac{(۱+۷x)+۲}{۱+۷x}=\frac{۱+۷x}{۱+۷x}+\frac{۲}{۱+۷x}=۱+\frac{۲}{۱+۷x}$$

کمترین مقدار عبارت بالا هنگامی حاصل می‌شود که x بیشترین مقدار خود را کسب کند. با توجه به این‌که:

$$P(A\cup B)\leq ۱\Rightarrow P(A-B)+P(B-A)+P(A\cap B)\leq ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۷}+\frac{۱}{۷}+x\leq ۱$$

$$\Rightarrow x\leq\frac{۳}{۷}$$

پس بیشترین مقدار x، برابر با $\frac{۳}{۷}$ خواهد بود و در ادامه، کمترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ عبارت است از:

$$\frac{P(A)}{P(B)}=۱+\frac{۲}{۱+۷x}=۱+\frac{۲}{۱+۷(\frac{۳}{۷})}=۱+\frac{۲}{۱+۳}=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

باسمه تعالی

مهروماه	سؤالات شبیه‌ساز نهایی		امتحان ۹: نوبت دوم
ساعت شروع:	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	پایه: یازدهم دورهٔ دوم متوسطه	رشته: ریاضی و فیزیک
تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان:	نام و نام‌خانوادگی:	سؤالات امتحانی درس: آمار و احتمال

ردیف	سؤالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از یک فضای نمونه‌ای، مستقل می‌باشند. ب) یک جامعهٔ آماری ممکن است مد نداشته باشد. پ) آماره ممکن است از یک نمونه به نمونهٔ دیگر تغییر کند. ت) در پرتاب یک تاس، اگر پیشامد «اول بودن» رخ دهد، پیشامد «مشاهدهٔ عدد بزرگ‌تر از یک» نیز رخ خواهد داد.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. الف) تعداد حالت‌های مختلف برای محاسبهٔ احتمال اشتراک n پیشامد به کمک قانون ضرب احتمال، برابر .... است. ب) هر چه‌قدر .... کمتر باشد، میزان پراکندگی داده‌ها کمتر می‌شود. (ضریب تغییرات / میانگین) پ) اگر انحراف‌معیار جامعه افزایش یابد، انحراف‌معیار میانگین برای یک نمونهٔ n عضوی، .... می‌یابد. ت) برای پی‌بردن به میزان مطالعهٔ دانش‌آموزان یک کلاس، بهترین روش گردآوری داده‌ها، .... است.	۱
۳	به کمک جدول ارزش‌ها نشان دهید: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)$	۱/۲۵
۴	ارزش گزارهٔ سوری زیر را با ذکر دلیل تعیین کرده و سپس نقیض آن را بنویسید. $\forall x \in \mathbb{R} ; \frac{x^۲ - ۹}{x + ۳} = x - ۳$	۱
۵	اگر A، B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، به‌طوری که $A \cup B = A \cup C$ و $A \cap B = A \cap C$، ثابت کنید: $B = C$	۱/۷۵
۶	اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، نشان دهید: $A \times B = B \times A \Rightarrow A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B$	۱
۷	عددی به‌تصادف از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۱۵۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخاب‌شده حداقل بر یکی از اعداد ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد را محاسبه کنید.	۱/۵
۸	مجموعهٔ $S = \{x, y, z, t, w\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A = \{x, y\}$، $B = \{x, y, z, t\}$ و $C = \{x, y, w\}$ سه پیشامد از S هستند. اگر $P(A) = \frac{۱}{۷}$ و $P(B) = \frac{۳}{۵}$، مقدار $P(C)$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۹	یک باتری سالم با شش باتری معیوب مخلوط شده است. برای یافتن باتری سالم، آن‌ها را بدون جایگزینی امتحان می‌کنیم. احتمال این‌که باتری سالم، در سومین آزمایش مشخص شود چه‌قدر است؟	۱/۲۵
۱۰	در انجام یک پروژهٔ کامپیوتری، سه دانش‌آموز A، B و C به ترتیب میزان مشارکت ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصدی داشته‌اند. اگر احتمال خطای این سه دانش‌آموز، به ترتیب ۷۰، ۸۰ و ۹۰ درصد باشد و برنامهٔ کامپیوتری نهایی دچار مشکل باشد، با چه احتمالی دانش‌آموز C مسئول آن است؟	۱/۲۵
۱۱	در یک مسابقهٔ تیراندازی، احتمال این‌که هادی به هدف بزند، $\frac{۳}{۵}$ و این احتمال برای محسن، $\frac{۲}{۳}$ است. اگر آن‌ها به هدف تیراندازی کنند، احتمال آن‌که حداقل یک نفر به هدف بزند را محاسبه کنید.	۱

مهروماه	سؤالات شبیه‌ساز نهایی		امتحان ۹: نوبت دوم
ساعت شروع:	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	پایه: یازدهم دورهٔ دوم متوسطه	رشته: ریاضی و فیزیک
تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان:	نام و نام‌خانوادگی:	سؤالات امتحانی درس: آمار و احتمال

ردیف	سؤالات	نمره
۱۲	جدول فراوانی تعداد غایبین یک کلاس در یک هفته به‌صورت زیر ثبت شده است:	۱/۵

روزهای هفته	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه
فراوانی	۱	۲	-	b	۴
فراوانی نسبی	a	۰/۲۵	۰	۰/۱۲۵	c

الف) مقادیر a، b و c را به دست آورید.

ب) نمودار دایره‌ای فراوانی تعداد غایبین را رسم کنید.

ردیف	سؤالات	نمره
۱۳	در داده‌های آماری ۲,۵,x,۳,۲,۴,۵ ، اگر مد فقط یک عدد باشد و میانه نیز ۴ باشد، مد را به دست آورید.	۰/۷۵
۱۴	اگر میانگین داده‌هایی که جدول فراوانی آن‌ها به‌صورت زیر است برابر با ۹/۶ باشد، فراوانی دادهٔ ۱۱ را به دست آورید.	۱

داده	۷	۹	۱۱	۱۳
فراوانی	۱۵	۹	؟	۱۱

ردیف	سؤالات	نمره
۱۵	تعداد نوزادان تازه به دنیا آمده در یک شهر کوچک، در نه روز متوالی به‌صورت زیر است: ۳,۲,۵,۷,۴,۵,۲,۲,۶ ضریب تغییرات این داده‌ها را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۱۶	از یک جامعهٔ ۸۰ نفری که با شماره‌های ۱ تا ۸۰ شماره‌گذاری شده‌اند، می‌خواهیم ۵ نفر را به روش سامانمند انتخاب کنیم. الف) تعداد افراد در هر طبقه را مشخص کنید. ب) اگر از قسمت اول، سومین نفر به روش تصادفی انتخاب شود، شمارهٔ افراد منتخب دیگر را تعیین کنید.	۰/۷۵
۱۷	در انتخاب یک نمونهٔ دوتایی از جامعهٔ {۰,۱,۲,۳,۴,۵} ، احتمال این‌که برآورد نقطه‌ای میانگین با پارامتر میانگین جامعه برابر باشد را محاسبه کنید.	۱
۱۸	اگر انحراف معیار قد دانش‌آموزان یک مدرسه ۴ سانتی‌متر باشد، طول بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای یک نمونهٔ ۲۵ عضوی از دانش‌آموزان را تعیین کنید.	۰/۵
	جمع نمره	۲۰

صفحهٔ ۲ از ۲

۱۱. اگر A پیشامد «امیر از بابک قدبلندتر است» و B پیشامد «امیر از نظر بلندی قد، نفر هفتم است» باشد، آن‌گاه طبق قانون بیز داریم:

$$P(B|A)=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)}$$

پیشامد $A|B$، به‌صورت زیر است:

×	×	×	امیر						
دهم	نهم	هشتم	هفتم	ششم	پنجم	چهارم	سوم	دوم	نفر اول

مکان‌هایی که با علامت × مشخص شده‌اند، جاهایی است که بابک می‌تواند در آن‌ها قرار گیرد؛ پس:

$$\underbrace{P(B|A)=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۳}{۹}}{\frac{۱}{۲}}}_{(۰/۷۵)}=\frac{\cancel{۳}^{۱}\times\cancel{۲}^{۱}}{\cancel{۱۰}_{۵}\times\cancel{۹}_{۳}}=\frac{۱}{۱۵}\ (۰/۲۵)$$

۱۲.

$$P(A\cup B)=۰/۹\ (۰/۲۵)\Rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۹\xrightarrow[(۰/۲۵)]{\text{مستقل‌اند } B \text{ و } A}$$

$$P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)=۰/۹\xrightarrow{P(A)=۰/۷۵}$$

$$۰/۷۵+P(B)-۰/۷۵P(B)=۰/۹\Rightarrow ۰/۲۵P(B)=۰/۱۵$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{۰/۱۵}{۰/۲۵}=\frac{۱۵}{۲۵}=۰/۶\ (۰/۲۵)$$

بنابراین پیشامد این‌که فقط A رخ دهد عبارت است از:

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$ (۰/۲۵)

$=P(A)-P(A)\times P(B)$ (A و B مستقل‌اند)

$=۰/۷۵-۰/۷۵\times۰/۶$ (۰/۲۵) $=۰/۷۵-۰/۴۵=۰/۳$ (۰/۲۵)

۱۳. الف) با توجه به فراوانی و فراوانی نسبی در گروه خونی A، داریم:

$$f_A=۵,\ f'_A=۰/۱\xrightarrow{f'_A=\frac{f_A}{n}}۰/۱=\frac{۵}{n}\Rightarrow n=\frac{۵}{۰/۱}=۵۰$$

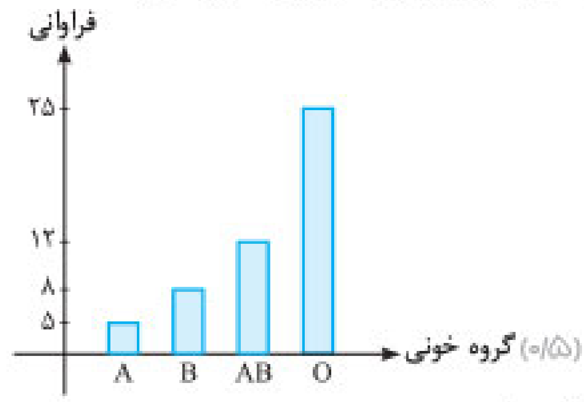
بنابراین داریم:

$$f'_B=\frac{f_B}{n}\Rightarrow ۰/۱۶=\frac{a}{۵۰}\Rightarrow a=۵۰\times۰/۱۶=۸\ (۰/۲۵)$$

$$f'_{AB}=\frac{f_{AB}}{n}\Rightarrow b=\frac{۱۲}{۵۰}\Rightarrow b=۰/۲۴\ (۰/۲۵)$$

$$f'_O=\frac{f_O}{n}\Rightarrow c=\frac{۲۵}{۵۰}=۰/۵\ (۰/۲۵)$$

ب) نمودار میله‌ای فراوانی گروه خونی به‌صورت زیر است:



۱۴. در حالت اولیه داریم:

$$\bar{x}=۱۵\Rightarrow\frac{\sum x_i}{n}=۱۵\Rightarrow\frac{\sum x_i}{۸}=۱۵\Rightarrow\sum x_i=۸\times۱۵=۱۲۰\ (۰/۲۵)$$

اگر دو دادهٔ ۱۲ و ۲۰ اضافه شوند، مجموع جدید عبارت است از:

$$۱۲۰+(۱۲+۲۰)=۱۲۰+۳۲=۱۵۲$$

با توجه به این‌که ۱۰ داده داریم، میانگین جدید عبارت است از:

$$\bar{x}=\frac{۱۵۲}{۱۰}\ (۰/۲۵)=۱۵/۲\ (۰/۲۵)$$

۱۵. محصولات کارخانه‌ای را باید انتخاب کنیم که پراکندگی کمتر یا ضریب تغییرات کمتری دارد. برای هر دو کارخانهٔ «الف» و «ب»، ضریب تغییرات را حساب می‌کنیم:

$$\text{کارخانهٔ «الف»}: CV_۱=\frac{\sigma_۱}{\bar{x}_۱}=\frac{۵۰}{۵۰۰۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰۰}\ (۰/۲۵)$$

$$\text{کارخانهٔ «ب»}: CV_۲=\frac{\sigma_۲}{\bar{x}_۲}=\frac{۵۵}{۶۰۰۰۰}\ (۰/۲۵)$$

با توجه به این‌که:

$$CV_۲=\frac{۵۵}{۶۰۰۰۰}<\frac{۶۰}{۶۰۰۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰۰}=CV_۱\ (۰/۲۵)$$

پس ضریب تغییرات کارخانهٔ «ب» کمتر است و باید محصولات کارخانهٔ «ب» را انتخاب کرد. (۰/۲۵)

۱۶. الف) برای رسم نمودار جعبه‌ای، داده‌ها را به شکل مرتب می‌نویسیم:

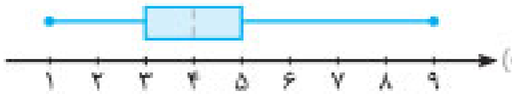
۱,۲,۳,۳,۴,۴,۴,۵,۶,۹

میانه (چارک دوم) عبارت است از:

$$Q_۲=\frac{x_۵+x_۶}{۲}=\frac{۴+۴}{۲}=۴\ (۰/۲۵)$$

چارک‌های اول و سوم نیز عبارت‌اند از: $Q_۱=x_۳=۳\ ,\ Q_۳=x_۸=۵$ (۰/۵)

بنابراین نمودار جعبه‌ای به‌صورت زیر خواهد بود:



ب) دامنهٔ میان‌چارکی یا همان IQR عبارت است از:

$$IQR=Q_۳-Q_۱=۵-۳=۲\ (۰/۲۵)$$

۱۷. الف) طبقه‌ای (۰/۲۵) / ب) سامانمند (سیستماتیک) (۰/۲۵)

۱۸. الف) $\frac{۳۰}{۱۵}=۲$ (۰/۲۵) / ب) $\frac{۳۰\times۲}{۱۵\times۴}=\frac{۶۰}{۶۰}=۱$ (۰/۲۵) / پ) خیر (۰/۲۵)؛ پرسیدن تعداد افراد خانواده از سرپرست‌های خانوار، جواب نمونه‌گیری را به جواب واقعی نزدیک می‌کند. (۰/۲۵)

۱۹. میانگین جرم ده ماهی صیدشده عبارت است از:

$$\frac{۸۰+۶۰+۶۵+۷۰+۱۰۰+۵۰+۸۰+۱۰۰+۶۰+۵۵}{۱۰}=\frac{۷۲۰}{۱۰}=۷۲\ (۰/۲۵)$$

با توجه به این‌که $\sigma=۲۱/۷$، پس بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین جرم ماهی‌های این منطقه عبارت است از:

$$[\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}]\ (۰/۲۵)=[۷۲-\frac{۲\times۲۱/۷}{\sqrt{۱۰}},۷۲+\frac{۲\times۲۱/۷}{\sqrt{۱۰}}]\ (۰/۲۵)$$

$$=[۷۲-\frac{۲\times\cancel{۲۱/۷}^{۷}}{\cancel{۳/۱}_{۱}},۷۲+\frac{۲\times\cancel{۲۱/۷}^{۷}}{\cancel{۳/۱}_{۱}}]=[۷۲-۱۴,۷۲+۱۴]=[۵۸,۸۶]\ (۰/۲۵)$$

پاسخ امتحان شمارهٔ ۹ ـ نوبت دوم

۱. الف) نادرست (۰/۲۵) / ب) درست (۰/۲۵) / پ) درست (۰/۲۵) / ت) درست (۰/۲۵)؛ زیرا $A_۱=\{۲,۳,۵\}$ و $A_۲=\{۲,۳,۴,۵,۶\}$؛ در نتیجه $A_۱\subseteq A_۲$.

۲. الف) $n!$ (۰/۲۵) / ب) ضریب تغییرات (۰/۲۵) / پ) افزایش (۰/۲۵)؛ زیرا $\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ و با افزایش σ، مقدار $\sigma_{\bar{x}}$ نیز افزایش می‌یابد. / ت) مصاحبه (۰/۲۵)

۳.

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$(p\wedge q)\vee\sim(p\vee q)$	$p\Leftrightarrow q$
د	د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	د	د	د
		(۰/۲۵)	(۰/۲۵)	(۰/۲۵)	(۰/۲۵)	(۰/۲۵)

با مقایسهٔ ستون‌های ششم و هفتم (از سمت چپ)، هم‌ارزی خواسته‌شده اثبات می‌شود.

۴. ارزش گزاره نادرست است (۰/۲۵)؛ زیرا به ازای $x=-۳$، سمت راست تساوی $x-۳=\frac{x^۲-۹}{x+۳}$، برابر با -۶ است؛ ولی سمت چپ تساوی برابر $\frac{۰}{۰}$ یعنی تعریف‌نشده است (۰/۲۵).

نقیض این گزارهٔ سوری عبارت است از:

$$\sim(\forall x\in\mathbb{R}\,;\,\frac{x^۲-۹}{x+۳}=x-۳)\equiv\exists x\in\mathbb{R}\,;\,\frac{x^۲-۹}{x+۳}\neq x-۳ \quad (۰/۵)$$

۵. طبق فرض داریم:

$A\bigcup B=A\bigcup C$ ❶

$A\bigcap B=A\bigcap C$ ❷

اکنون داریم:

$B=B\bigcap(A\bigcup B)$ (۰/۲۵) خاصیت جذب

$=B\bigcap(A\bigcup C)$ (۰/۲۵) فرض ❶

$=(B\bigcap A)\bigcup(B\bigcap C)$ (۰/۲۵) توزیع‌پذیری

$=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$ (۰/۲۵) فرض ❷

$=(A\bigcup B)\bigcap C$ (۰/۲۵) توزیع‌پذیری

$=(A\bigcup C)\bigcap C$ (۰/۲۵) فرض ❶

$=C$ (۰/۲۵) خاصیت جذب

۶. فرض کنیم $A\times B=B\times A$. نشان می‌دهیم که $A=\varnothing\vee B=\varnothing\vee A=B$.
اگر $A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ که حکم اثبات می‌شود (۰/۲۵). فرض کنیم $A\neq\varnothing$ و $B\neq\varnothing$ و نشان می‌دهیم که $A=B$. از روش عضوگیری داریم:

$$\forall x\in A\,,\,\forall y\in B\Leftrightarrow(x,y)\in A\times B\xleftrightarrow{A\times B=B\times A}$$
$$(x,y)\in B\times A\Leftrightarrow x\in B,y\in A \quad (۰/۵)$$

پس $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$؛ بنابراین $A=B$ (۰/۲۵).

۷. اگر A و B به‌ترتیب مجموعهٔ اعداد بخش‌پذیر بر ۲ و ۳ در اعداد طبیعی ۱ تا ۱۵۰ باشند، باید $P(A\bigcup B)$ را محاسبه کنیم:

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B) \quad (۰/۲۵)$$
$$=\frac{[\frac{۱۵۰}{۲}]}{۱۵۰}+\frac{[\frac{۱۵۰}{۳}]}{۱۵۰}-\frac{[\frac{۱۵۰}{۶}]}{۱۵۰} \ (۰/۷۵)=\frac{۷۵}{۱۵۰}+\frac{۵۰}{۱۵۰}-\frac{۲۵}{۱۵۰} \quad (۰/۲۵)$$
$$=\frac{۱۰۰}{۱۵۰}=\frac{۲}{۳} \quad (۰/۲۵)$$

۸.

$$P(S)=۱ \ (۰/۲۵)\Rightarrow \underbrace{P(x)+P(y)+P(z)+P(t)}_{P(B)}+P(w)=۱ \quad (۰/۲۵)$$
$$\Rightarrow\frac{۳}{۵}+P(w)=۱\Rightarrow P(w)=۱-\frac{۳}{۵}=\frac{۲}{۵} \quad (۰/۲۵)$$

بنابراین داریم:

$$P(C)=\underbrace{P(x)+P(y)}_{P(A)}+P(w) \ (۰/۲۵)=\frac{۱}{۷}+\frac{۲}{۵}=\frac{۱۹}{۳۵} \quad (۰/۲۵)$$

۹. چون باتری سالم در سومین آزمایش مشخص شده است؛ پس دو باتری اول آزمایش‌شده، معیوب هستند. اگر A_i پیشامد سالم‌بودن باتری در آزمایش iام باشد، باید $P(A'_۱\bigcap A'_۲\bigcap A_۳)$ را به دست آوریم. طبق قانون ضرب احتمال داریم:

$$P(A'_۱\bigcap A'_۲\bigcap A_۳)=P(A'_۱)\cdot P(A'_۲\,|\,A'_۱)\cdot P(A_۳\,|\,A'_۱\bigcap A'_۲) \quad (۰/۲۵)$$
$$=\frac{\cancel{۶}}{۷}\times\frac{\cancel{۵}}{\cancel{۶}}\times\frac{۱}{\cancel{۵}} \ (۰/۷۵)=\frac{۱}{۷} \quad (۰/۲۵)$$

۱۰. ابتدا از نمودار درختی و قانون احتمال کل، احتمال این‌که برنامهٔ کامپیوتری دچار مشکل باشد را به دست می‌آوریم:

$$\text{برنامهٔ کامپیوتری}\begin{cases}\xrightarrow{۰/۲}A\xrightarrow{۰/۷}\text{(M) ایجاد مشکل}\\ \xrightarrow{۰/۳}B\xrightarrow{۰/۸}\text{(M) ایجاد مشکل}\\ \xrightarrow{۰/۵}C\xrightarrow{۰/۹}\text{(M) ایجاد مشکل}\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$P(M)=(۰/۲\times۰/۷)+(۰/۳\times۰/۸)+(۰/۵\times۰/۹)$$
$$=۰/۱۴+۰/۲۴+۰/۴۵=۰/۸۳ \quad (۰/۵)$$

اکنون طبق قانون بیز داریم:

$$\underbrace{P(C|M)=\frac{P(C)\cdot P(M|C)}{P(M)}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{۰/۵\times۰/۹}{۰/۸۳}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۰/۴۵}{۰/۸۳}=\frac{۴۵}{۸۳} \quad (۰/۲۵)$$

۱۱. اگر A و B به‌ترتیب پیشامدهای به هدف‌زدن هادی و محسن باشند، باید $P(A\bigcup B)$ را محاسبه کنیم. از مستقل‌بودن A و B، داریم $P(A\bigcap B)=P(A)\cdot P(B)$؛ پس:

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B) \quad (۰/۲۵)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B) \quad (۰/۲۵)$$
$$=\frac{۳}{۵}+\frac{۲}{۳}-(\frac{\cancel{۳}}{۵}\times\frac{۲}{\cancel{۳}}) \ (۰/۲۵)=\frac{۳}{۵}+\frac{۲}{۳}-\frac{۲}{۵}=\frac{۱}{۵}+\frac{۲}{۳}=\frac{۱۳}{۱۵} \quad (۰/۲۵)$$

۱۲. الف) باتوجه به فراوانی و فراوانی نسبی در یکشنبه داریم:

$$f_۲=۲\,,\,f'_۲=۰/۲۵\xrightarrow{f'_۲=\frac{f_۲}{n}}۰/۲۵=\frac{۲}{n}\Rightarrow n=\frac{۲}{۰/۲۵}=۸ \quad (۰/۲۵)$$

بنابراین:

$$\sum f_i=n\Rightarrow ۱+۲+۰+b+۴=۸\Rightarrow b+۷=۸\Rightarrow b=۱ \quad (۰/۲۵)$$
$$f'_۱=\frac{f_۱}{n}\Rightarrow a=\frac{۱}{۸}=۰/۱۲۵ \quad (۰/۲۵)$$
$$f'_۵=\frac{f_۵}{n}\Rightarrow c=\frac{۴}{۸}=۰/۵ \quad (۰/۲۵)$$

ب) مجموع کل فراوانی‌ها، $n=۸$ است؛ پس دایره را به هشت قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و باتوجه به فراوانی غایبین هر روز، به آن تعدادی ناحیه اختصاص می‌دهیم:

(۰/۵)

۱۳. بدون در نظر گرفتن x، داده‌ها به‌صورت ۲,۵,۳,۲,۴,۵ هستند. مُد این داده‌ها، ۲ و ۵ است. برای این‌که مُد فقط یک عدد باشد، x باید ۲ یا ۵ باشد (۰/۲۵). در هر حالت، میانه را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=2 \Rightarrow \text{داده‌ها}: 2,5,2,3,2,4,5 \xrightarrow{\text{مرتب}} 2,2,2,3,4,5,5 \\ \Rightarrow \text{میانه}=3 \\ x=5 \Rightarrow \text{داده‌ها}: 2,5,5,3,2,4,5 \xrightarrow{\text{مرتب}} 2,2,3,4,5,5,5 \\ \Rightarrow \text{میانه}=4 \end{cases} \quad (0/25)$$

چون قرار است میانه برابر ۴ باشد، پس حالت دوم رخ می‌دهد؛ یعنی $x=5$ خواهد بود و در این حالت، مُد برابر ۵ است. (۰/۲۵)

۱۴. از میانگین وزن‌دار استفاده می‌کنیم. اگر فراوانی دادهٔ ۱۱، برابر x باشد، آن‌گاه:

$$\bar{x}_w = 9/6 \Rightarrow \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = 9/6 \quad (0/25)$$

$$\frac{(7\times 15)+(9\times 9)+(11\times x)+(13\times 11)}{15+9+x+11} = 9/6 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \frac{105+81+11x+143}{x+35} = 9/6 \Rightarrow 9/6(x+35) = 11x+329$$

$$\Rightarrow 9/6x+336 = 11x+329 \ (0/25) \Rightarrow 1/4x = 7 \Rightarrow x=5 \ (0/25)$$

۱۵. ابتدا میانگین داده‌های ۳,۲,۵,۷,۴,۵,۲,۲,۶ را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{3+2+5+7+4+5+2+2+6}{9} = \frac{36}{9} = 4 \quad (0/25)$$

بنابراین داریم:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{9}[1+4+1+9+0+1+4+4+4] = \frac{28}{9} \quad (0/5)$$

پس ضریب تغییرات عبارت است از:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \ (0/25) = \frac{\sqrt{\frac{28}{9}}}{4} = \frac{\frac{2\sqrt{7}}{3}}{4} = \frac{2\sqrt{7}}{12} = \frac{\sqrt{7}}{6} \quad (0/25)$$

۱۶. الف) تعداد افراد در هر طبقه عبارت است از: $\frac{80}{5}=16$ (۰/۲۵)

ب) از قسمت اول، سومین نفر، یعنی شمارهٔ ۳ انتخاب شده است؛ پس شماره‌های منتخب افراد دیگر، یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۳ و قدرنسبت ۱۶ است که عبارت‌اند از: ۳,۱۹,۳۵,۵۱,۶۷ (۰/۵)

۱۷. ابتدا میانگین جامعهٔ $\{0,1,2,3,4,5\}$ را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{0+1+2+3+4+5}{6} = \frac{15}{6} = 2/5 \quad (0/25)$$

نمونه‌های دوعضوی این جامعه که میانگین ۲/۵ دارند، عبارت‌اند از:

$$\{0,5\},\{1,4\},\{2,3\} \quad (0/25)$$

بنابراین سه نمونه با میانگین ۲/۵ وجود دارد و چون تعداد کل نمونه‌های دوعضوی جامعهٔ شش‌عضوی داده‌شده، برابر $\binom{6}{2}$ است، پس احتمال این‌که یک نمونهٔ دوعضوی میانگین ۲/۵ داشته باشد، عبارت است از:

$$P(A) = \frac{3}{\binom{6}{2}} \ (0/25) = \frac{3}{\frac{6\times 5}{2}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} \quad (0/25)$$

۱۸. با توجه به این‌که $\sigma=4$ و $n=25$، طول بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد عبارت است از:

$$\frac{4\sigma}{\sqrt{n}} \ (0/25) = \frac{4\times 4}{\sqrt{25}} = \frac{16}{5} = 3/2 \quad (0/25)$$

پاسخ امتحان شمارهٔ ۱۰ ـ خرداد ۱۴۰۳

۱. الف) درست (۰/۲۵) / ب) نادرست (۰/۲۵) / پ) نادرست (۰/۲۵)

۲. الف) p (۰/۲۵) / ب) ۸ (۰/۲۵) / پ) اریب (۰/۲۵)

۳.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د
		(۰/۲۵)	(۰/۲۵)	(۰/۲۵)

باتوجه به ستون‌های سوم و پنجم از سمت چپ، هم‌ارزی برقرار است. (۰/۲۵)

۴.

$$\underbrace{\forall x \in \mathbb{N}}_{(0/25)} ; \underbrace{n < n^2}_{(0/25)}$$

ارزش گزاره نادرست است؛ (۰/۲۵) زیرا به ازای $n=1$، عبارت $1<1^2$ برقرار نیست. (۰/۲۵)

۵.

$$\forall x ; \underbrace{x \in (A \cup C)}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{x \in A \vee x \in C}_{(0/25)}$$

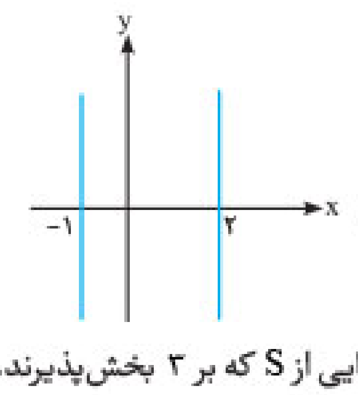
$$\xrightarrow[C\subseteq D]{A\subseteq B} \underbrace{x \in B \vee x \in D}_{(0/25)} \Rightarrow x \in (B \cup D) \quad (0/25)$$

بنابراین $A \cup C \subseteq B \cup D$.

۶.

$$(A-B)\cup(A\cap B) = \underbrace{(A\cap B')}_{(0/25)}\cup(A\cap B) = \underbrace{A\cap(B'\cup B)}_{(0/25)} = \underbrace{A\cap U}_{(0/25)} = \underbrace{A}_{(0/25)}$$

۷.



(۰/۵)

۸. A: پیشامد عضوهایی از S که بر ۳ بخش‌پذیرند.

B: پیشامد عضوهایی از S که بر ۴ بخش‌پذیرند.

روش اول:

$$S=\{1,2,3,4,\cdots,200\} \Rightarrow n(S)=200, n(A)=[\frac{200}{3}]=66 \quad (0/25)$$

$$n(A\cap B)=[\frac{200}{12}]=16 \quad (0/25)$$

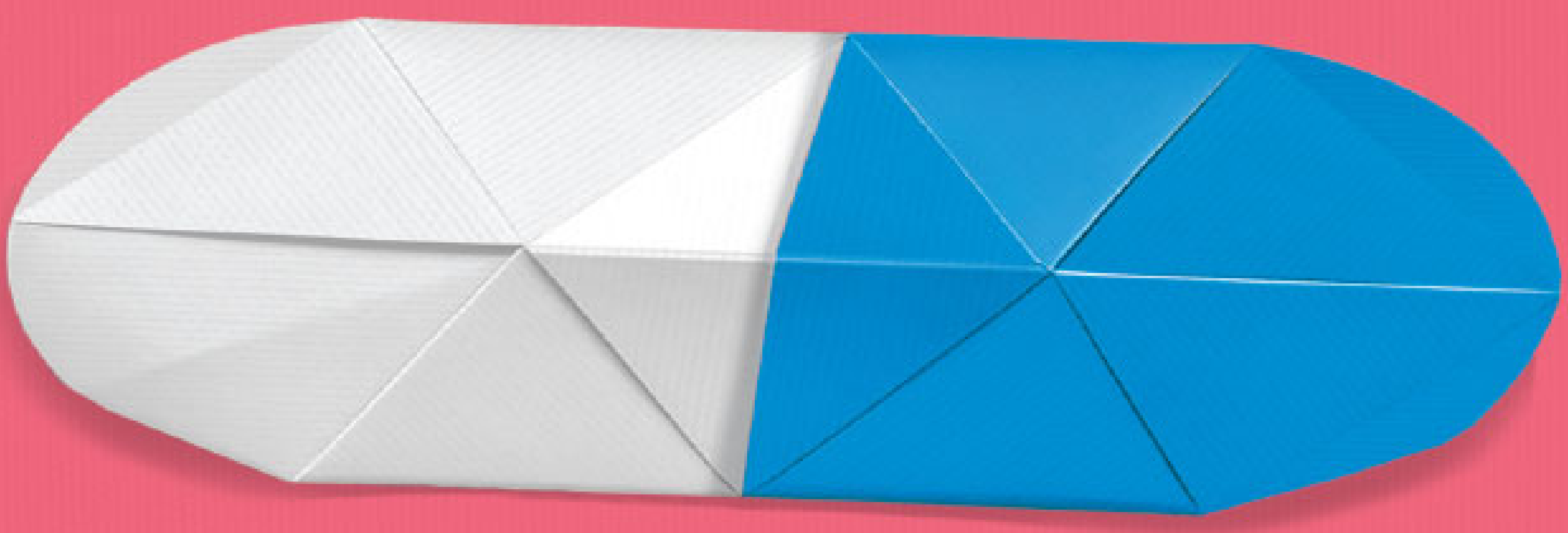
$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \quad (0/25)$$

$$=\frac{n(A)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{66}{200}-\frac{16}{200}=\frac{50}{200}=\frac{1}{4} \quad (0/25)$$

خلاصه کپسولی

آمار و احتمال

چند تیپ پرتکرار امتحانی



مهروماه

تیپ ۱۳ رسم نمودار ضرب دکارتی دو مجموعه

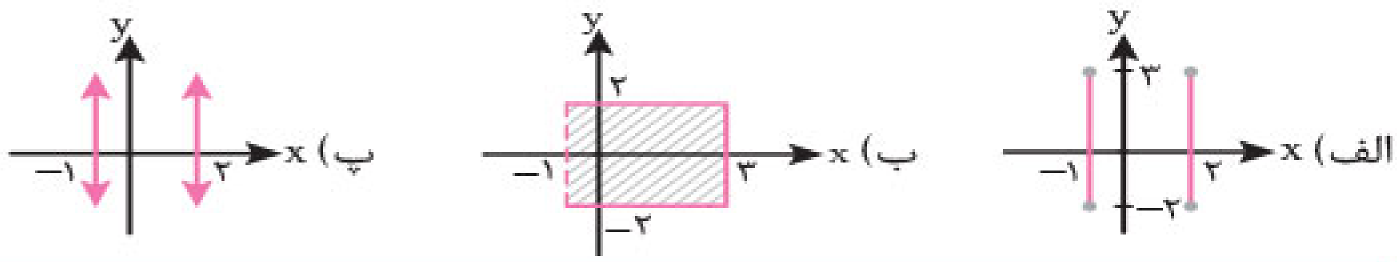
۱۷. در هر یک از قسمت‌های زیر، نمودار $A \times B$ را رسم کنید.

الف) $B = [-۲, ۳] , A = \{-۱, ۲\}$ ب) $B = [-۲, ۲] , A = (-۱, ۳]$

پ) $B = \mathbb{R} , A = \{-۱, ۲\}$

(نهایی ۱۴۰۳)

پاسخ



فصل دوم: احتمال

تیپ ۱۴ اثبات به کمک اصول و قضایای احتمال

۱۸. اگر $A \subseteq B$ باشد، با استفاده از اصول و قضایای احتمال، ثابت کنید که:

الف) $P(A-B) = P(A) - P(B)$ ب) $P(B) \le P(A)$

پاسخ الف) با توجه به این‌که $B \subseteq A$، پس مجموعه‌های $A - B$ و B ناسازگارند؛ بنابراین طبق اصول احتمال داریم:

$$P(\underbrace{(A-B)\cup B}_{A}) = P(A-B) + P(B) \Rightarrow P(A) = P(A-B) + P(B)$$

$$\Rightarrow P(A-B) = P(A) - P(B)$$

ب) با توجه به قسمت «الف»، می‌دانیم که اگر $B \subseteq A$، آن‌گاه $P(A-B) = P(A) - P(B)$؛ پس داریم:

$$P(A) = P(B) + P(A-B)$$

طبق اصول احتمال، $۰ \le P(A-B) \le ۱$؛ پس در تساوی بالا، باید $P(B) \le P(A)$.

تیپ ۱۵ حل مسئله به کمک قضیه‌های احتمال

۱۹. عددی به‌تصادف از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که عدد انتخابی بر ۳ بخش‌پذیر باشد، ولی بر ۴ بخش‌پذیر نباشد را محاسبه کنید. (نهایی ۱۴۰۳)

پاسخ فضای نمونه‌ای و تعداد اعضای آن عبارت‌اند از: $S = \{۱, ۲, \dots, ۲۰۰\} \Rightarrow n(S) = ۲۰۰$

اگر A و B به‌ترتیب پیشامد بخش‌پذیری عدد انتخاب‌شده بر ۳ و ۴ باشند، باید $P(A-B)$ را به دست آوریم. طبق قضیه‌ای داریم:

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{n(A)}{n(S)} - \frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$= \frac{[\frac{۲۰۰}{۳}]}{۲۰۰} - \frac{[\frac{۲۰۰}{۱۲}]}{۲۰۰} = \frac{۶۶}{۲۰۰} - \frac{۱۶}{۲۰۰} = \frac{۵۰}{۲۰۰} = \frac{۱}{۴}$$

تیپ ۱۶ محاسبهٔ احتمال یک پیشامد به کمک احتمال پیشامدهای دیگر

۲۰. اگر $S = \{a, b, c, d\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و $P(\{a, b, c\}) = \frac{۲}{۳}$ و $P(\{b, c, d\}) = \frac{۳}{۴}$ باشد، آن‌گاه $P(\{b, c\})$ را بیابید. (نهایی ۱۴۰۳ - خارج)

پاسخ

$$P(S) = ۱ \Rightarrow P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = ۱ \Rightarrow P(\{a, b, c\}) + P(d) = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۳} + P(d) = ۱ \Rightarrow P(d) = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

با توجه به این‌که $P(\{b, c, d\}) = \frac{۳}{۴}$، داریم:

$$P(b) + P(c) + P(d) = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{P(d)=\frac{۱}{۳}} P(b) + P(c) + \frac{۱}{۳} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow P(\{b, c\}) = \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۳} = \frac{۵}{۱۲}$$

تیپ ۱۷ کاربرد احتمال غیر هم‌شانس در حل مسئله

۲۱. یک تاس به‌گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول، چهار برابر احتمال وقوع هر عدد غیراول است. در پرتاب این تاس، احتمال این‌که عدد زوج مشاهده شود را به دست آورید. (نهایی ۱۴۰۳)

پاسخ در پرتاب یک تاس، فضای نمونه‌ای به شکل $S=\{1,2,\dots,6\}$ و پیشامد اعداد اول نیز عبارت است از $\{2,3,5\}$ با توجه به فرض داریم:

$$P(\text{هر عدد اول})=4P(\text{هر عدد غیر اول})\Rightarrow P(2)=P(3)=P(5)=4P(1)=4P(4)=4P(6)$$

بنابراین با توجه به این‌که $P(S)=1$، داریم: $P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1$

$$\xrightarrow{P(1)=a} a+4a+4a+a+4a+a=1\Rightarrow 15a=1\Rightarrow a=\frac{1}{15}$$

بنابراین احتمال مشاهدهٔ یک عدد زوج عبارت است از:

$$P(\{2,4,6\})=P(2)+P(4)+P(6)=4a+a+a=6a=6\times\frac{1}{15}=\frac{2}{5}$$

تیپ ۱۸ محاسبهٔ احتمال شرطی به کمک کاهش فضای نمونه‌ای

۲۲. دو تاس آبی و قرمز را پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد روشده در دو تاس، ۱۰ شده است، احتمال این‌که عدد روشده در تاس آبی عددی زوج باشد را به دست آورید. (نهایی ۱۴۰۳ - خارج)

پاسخ اگر تاس آبی را تاس اول و تاس قرمز را تاس دوم در نظر بگیریم، با توجه به این‌که مجموع اعداد روشده برابر ۱۰ است؛ پس: $S=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$

اکنون در این فضای نمونه‌ای، پیشامد این‌که عدد روشده در تاس اول (تاس آبی)، عددی زوج باشد عبارت است از: $A=\{(4,6),(6,4)\}$

پس داریم: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{2}{3}$

تیپ ۱۹ استفاده از فرمول احتمال شرطی در اثبات مسئله

۲۳. فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به‌طوری که $P(B)\neq 0$، ثابت کنید:
$P(A'|B)=1-P(A|B)$ (نهایی ۱۴۰۳)

پاسخ

$$P(A'|B)=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B-A)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(B)}{P(B)}-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=1-P(A|B)$$

۲۴. اگر A_1 و A_2 دو پیشامد ناسازگار باشند، آن‌گاه ثابت کنید:

$$P((A_1\cup A_2)|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$$

پاسخ

$$P((A_1\cup A_2)|B)=\frac{P((A_1\cup A_2)\cap B)}{P(B)}=\frac{P((A_1\cap B)\cup(A_2\cap B))}{P(B)}$$

با توجه به این‌که A_1 و A_2 ناسازگارند، پس $(A_1\cap B)$ و $(A_2\cap B)$ نیز ناسازگارند؛ بنابراین به کمک اصول احتمال، تساوی بالا به‌صورت زیر ادامه می‌یابد:

$$\frac{P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}+\frac{P(A_2\cap B)}{P(B)}=P(A_1|B)+P(A_2|B)$$

تیپ ۲۰ قانون ضرب احتمال و کاربرد آن در حل مسئله

۲۵. دروازه‌بان یک تیم فوتبال، اگر روحیهٔ خوبی داشته باشد، با احتمال ۶۰ درصد و اگر روحیهٔ بدی داشته باشد، با احتمال ۳۰ درصد ضربهٔ پنالتی را مهار می‌کند. پیش از اولین ضربهٔ پنالتی، روحیهٔ این دروازه‌بان خوب است. احتمال آن را به دست آورید که این دروازه‌بان در سه ضربهٔ پنالتی اول، دوم و سوم، دقیقاً دو ضربهٔ آخر را مهار کند. (با مهار هر پنالتی، روحیهٔ دروازه‌بان خوب و در غیر این صورت بد می‌شود.) (نهایی ۱۴۰۳)

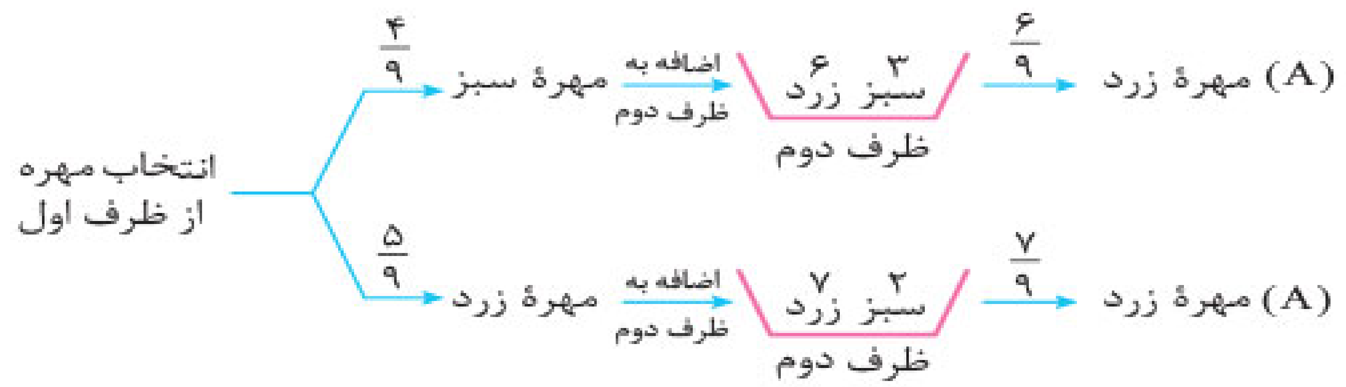
پاسخ اگر A_i پیشامد مهار ضربهٔ پنالتی iاُم توسط دروازه‌بان باشد، باید $P(A_1'\cap A_2\cap A_3)$ را به دست آوریم. به کمک قانون ضرب احتمال داریم:

$$P(A_1'\cap A_2\cap A_3)=P(A_1')\cdot P(A_2|A_1')\cdot P(A_3|A_1'\cap A_2)=0/4\times0/3\times0/6=0/072$$
$$=0/4\times0/3\times0/6=0/072$$

تیپ ۲۱ قانون احتمال کل

۲۶. دو ظرف داریم. در اولی ۴ مهرهٔ سبز و ۵ مهرهٔ زرد و در دومی ۲ مهرهٔ سبز و ۶ مهرهٔ زرد وجود دارد. از ظرف اول، یک مهره به‌تصادف برمی‌داریم و بدون مشاهده به ظرف دوم منتقل می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می‌آوریم. احتمال آن‌که این مهره زرد باشد را محاسبه کنید. (نهایی ۱۴۰۳ - خارج)

پاسخ با توجه به فرض مسئله، می‌توانیم نمودار درختی زیر را رسم کنیم:



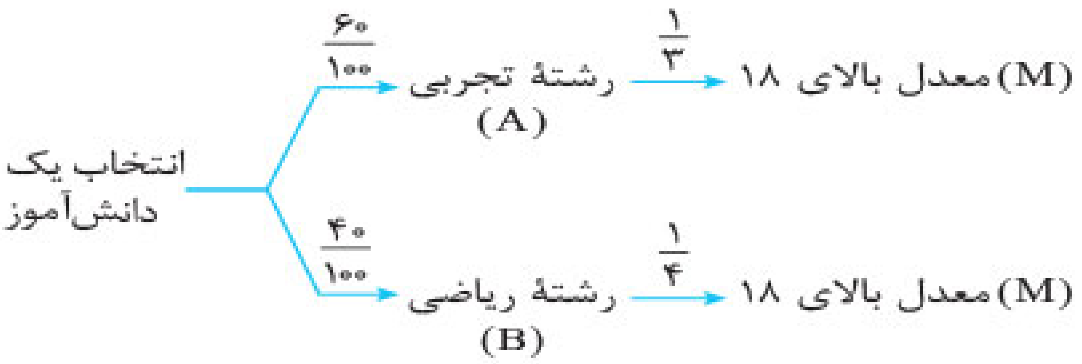
اکنون طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A)=(\frac{۴}{۹}\times\frac{۶}{۹})+(\frac{۵}{۹}\times\frac{۷}{۹})=\frac{۲۴+۳۵}{۸۱}=\frac{۵۹}{۸۱}$$

تیپ ۲۲ قانون بیز

۲۷. در مدرسه‌ای ۶۰ درصد دانش‌آموزان در رشتهٔ تجربی و ۴۰ درصد دانش‌آموزان در رشتهٔ ریاضی تحصیل می‌کنند. در این مدرسه $\frac{۱}{۳}$ دانش‌آموزان رشتهٔ تجربی و $\frac{۱}{۴}$ دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی، معدل بالای ۱۸ کسب کرده‌اند. دانش‌آموزی به‌تصادف از این مدرسه انتخاب شده و معدل او بالای ۱۸ است. احتمال آن‌که این فرد، دانش‌آموز رشتهٔ تجربی باشد را به دست آورید. (نهایی ۱۴۰۳)

پاسخ با توجه به فرض مسئله، می‌توانیم نمودار درختی زیر را رسم کنیم:



بنابراین طبق قانون بیز داریم:

$$P(A\mid M)=\frac{P(A)\cdot P(M\mid A)}{P(M)}=\frac{\frac{۶۰}{۱۰۰}\times\frac{۱}{۳}}{(\frac{۶۰}{۱۰۰}\times\frac{۱}{۳})+(\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۱}{۴})}=\frac{\frac{۲}{۱۰}}{\frac{۳}{۱۰}}=\frac{۲}{۳}$$

تیپ ۲۳ بررسی مستقل‌بودن دو پیشامد

۲۸. در پرتاب دو تاس، فرض کنید A پیشامد مشاهدهٔ عدد ۵ در تاس اول و B پیشامد مشاهدهٔ مجموع ۹ در برآمدهای دو تاس باشد. مستقل بودن یا نبودن پیشامدهای A و B را بررسی کنید. (نهایی ۱۴۰۳)

پاسخ در پرتاب دو تاس، اگر S فضای نمونه‌ای باشد، آن‌گاه $n(S)=۶\times۶=۳۶$.

پیشامدهای A و B و احتمال آن‌ها عبارت‌اند از:

$$A=\{(۵,۱),(۵,۲),\dots,(۵,۶)\}\Rightarrow P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

$$B=\{(۳,۶),(۴,۵),(۵,۴),(۶,۳)\}\Rightarrow P(B)=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

$$A\cap B=\{(۵,۴)\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۳۶}$$

پس:

بنابراین $P(A)\times P(B)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۹}=\frac{۱}{۵۴}$، در حالی‌که $P(A\cap B)=\frac{۱}{۳۶}$؛ پس $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$؛ یعنی پیشامدهای A و B مستقل نیستند.